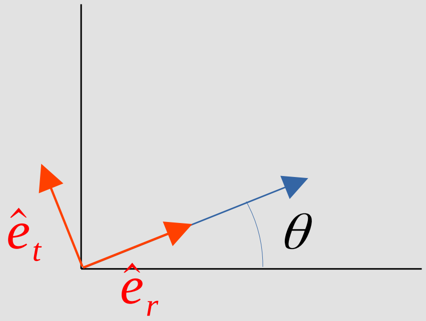
Le coordinate polari nel piano

Esprimiamo un vettore in termini della distanza dall’origine e dall’angolo tra esso e l’asse delle ascisse.

$$\vec{r}=r_x\hat{i}+r_y\hat{j}=\rho\cos\theta\,\hat{i}+\rho\sin\theta\,\hat{j}$$



Introduciamo il versore radiale e quello trasverso:

$$\hat{e}_r=\hat{r}=\cos\theta\,\hat{i}+\sin\theta\,\hat{j}$$
$$\hat{e}_t=-\sin\theta\,\hat{i}+\cos\theta\,\hat{j}$$
$$\hat{e}_r\times\hat{e}_t=\hat{k}$$
$$\vec{r}=\rho\,\hat{e}_r$$

Queste informazioni sono fornite per completezza ma non fanno parte del programma d’esame

Le coordinate polari nel piano

$$\hat{e}_r = \hat{r} = \cos\theta\ \hat{i} + \sin\theta\ \hat{j}$$
$$\hat{e}_t = -\sin\theta\ \hat{i} + \cos\theta\ \hat{j}$$
$$\vec{r} = \rho\ \hat{e}_r$$

Deriviamo per ottenere la velocità e l'accelerazione in coordinate polari.
Attenzione: stavolta i versori **non sono costanti!**

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = -\dot{\theta}\sin\theta\ \hat{i} + \dot{\theta}\cos\theta\ \hat{j} = \dot{\theta}\ \hat{e}_t$$
$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = -\dot{\theta}\cos\theta\ \hat{i} - \dot{\theta}\sin\theta\ \hat{j} = -\dot{\theta}\ \hat{e}_r$$

Queste informazioni sono fornite per completezza ma non fanno parte del programma d'esame

Quindi

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho\ \hat{e}_r\right) = \dot{\rho}\ \hat{e}_r + \rho\ \dot{\theta}\ \hat{e}_t$$
$$v_r = \dot{\rho} \qquad \text{velocità radiale}$$
$$v_t = \rho\ \dot{\theta} \qquad \text{velocità trasversa}$$

Attenzione: il polo è libero, non necessariamente il punto materiale è in moto circolare intorno ad esso!

Le coordinate polari nel piano

$$\hat{e}_r = \hat{r} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$$
$$\hat{e}_t = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$
$$\vec{r} = \rho\,\hat{e}_r$$

Deriviamo per ottenere la velocità e l'accelerazione in coordinate polari.
Attenzione: stavolta i versori **non sono costanti!**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\,\hat{e}_r + \rho\,\dot{\theta}\,\hat{e}_t\right) = \ddot{\rho}\,\hat{e}_r + \dot{\rho}\,\dot{\theta}\,\hat{e}_t + \dot{\rho}\,\dot{\theta}\,\hat{e}_t + \rho\,\ddot{\theta}\,\hat{e}_t - \rho\left(\dot{\theta}\right)^2\hat{e}_r =$$
$$= \left(\ddot{\rho} - \rho\left(\dot{\theta}\right)^2\right)\hat{e}_r + \left(2\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta}\right)\hat{e}_t$$
$$a_r = \ddot{\rho} - \rho\left(\dot{\theta}\right)^2 \quad \text{accelerazione radiale}$$
$$a_t = 2\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta} \quad \text{accelerazione trasversa}$$

Queste informazioni sono fornite per completezza ma non fanno parte del programma d'esame

Attenzione: il polo è libero, non necessariamente il punto materiale è in moto circolare intorno ad esso!
Osserviamo con attenzione l'accelerazione trasversa:

$$a_t = 2\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta} = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\,\dot{\theta}\right) \qquad \vec{r}\times\vec{v} = \rho\,\hat{e}_r \times \left(\dot{\rho}\,\hat{e}_r + \rho\,\dot{\theta}\,\hat{e}_t\right) = \rho\,\hat{e}_r \times \rho\,\dot{\theta}\,\hat{e}_t = \rho^2\,\dot{\theta}\,\hat{k}$$

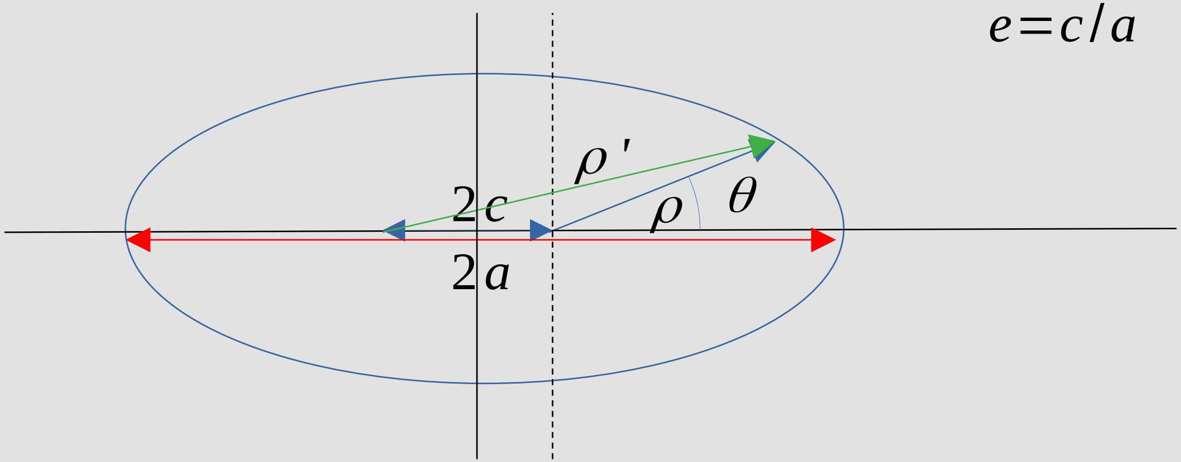
L'accelerazione trasversa è legata al **momento angolare per unità di massa e alla velocità areale**

Le coordinate polari nel piano

Queste informazioni sono fornite per completezza ma non fanno parte del programma d'esame

Equazione dell'ellisse in coordinate polari rispetto ad un fuoco:

$e = c/a$ eccentricità



$$\rho' = \sqrt{(2c+\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2} = \sqrt{4c^2 + 4c\rho\cos\theta + \rho^2}$$

Ellisse: *luogo dei punti la <u>somma</u> delle cui distanze da due fuochi è costante*

$$\rho' + \rho = k \Rightarrow \rho + \sqrt{4c^2 + 4c\rho\cos\theta + \rho^2} = k = 2a$$

Le coordinate polari nel piano

Queste informazioni sono fornite per completezza ma non fanno parte del programma d'esame

Equazione dell'ellisse in coordinate polari rispetto ad un fuoco:

Controlliamo che si ottenga la forma cartesiana ben nota, se un fuoco è in *c* e l'altro in -*c*.

$$\rho=\sqrt{(x-c)^2+y^2};\rho'=\sqrt{(x+c)^2+y^2};x=\rho\cos\theta-c;y=\rho\sin\theta$$

$$\rho+\rho'=2a\Rightarrow\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\Rightarrow(x-c)^2+y^2=4a^2+(x+c)^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$x^2+c^2-2xc+y^2=4a^2+x^2+c^2+2xc+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$4xc+4a^2=4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\Rightarrow xc/a+a=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\Rightarrow x^2c^2/a^2+a^2+2xc=x^2+c^2+2xc+y^2$$

$$y^2+x^2(1-c^2/a^2)=a^2-c^2\Rightarrow\frac{y^2}{a^2-c^2}+\frac{x^2}{a^2}=1$$

È la formula dell'ellisse in coordinate cartesiane

Le coordinate polari nel piano

Queste informazioni sono fornite per completezza ma non fanno parte del programma d'esame

Equazione dell'ellisse in coordinate polari rispetto ad un fuoco:

$$\rho+\sqrt{4c^2+4c\rho\cos\theta+\rho^2}=2a\Rightarrow\rho+\sqrt{4a^2e^2+4ae\rho\cos\theta+\rho^2}=2a$$

$$\sqrt{4a^2e^2+4ae\rho\cos\theta+\rho^2}=2a-\rho\Rightarrow 4a^2e^2+4ae\rho\cos\theta+\rho^2=4a^2+\rho^2-4a\rho$$

$$a^2(e^2-1)+ae\rho\cos\theta=-a\rho\Rightarrow a\rho(e\cos\theta+1)=(1-e^2)a^2$$

$$\rho(e\cos\theta+1)=a(1-e^2)=h$$

$$\cos\theta=\frac{h/\rho-1}{e}$$

$$\theta=\arccos\left(\frac{h/\rho-1}{e}\right)$$

Le coordinate polari nel piano

Queste informazioni sono fornite per completezza ma non fanno parte del programma d'esame

Osserviamo in particolare l'ultima formula in forma differenziale

$$\theta = \arccos\left(\frac{h/\rho - 1}{e}\right) \Rightarrow \frac{d\theta}{d\rho} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(h/\rho - 1)^2}{e^2}}}\left(\frac{h}{e\rho^2}\right)$$

$$\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{h}{\sqrt{e^2\rho^4 - \rho^4(h/\rho - 1)^2}} = \frac{h}{\sqrt{e^2\rho^4 - \rho^4\left(\frac{h^2}{\rho^2} - 2\frac{h}{\rho} + 1\right)}}$$

$$\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{h}{\sqrt{\rho^4(e^2 - 1) + 2h\rho^3 - h^2\rho^2}}$$

Le coordinate polari nel piano e un caso notevole

Queste informazioni sono fornite per completezza ma non fanno parte del programma d'esame

Consideriamo il caso in cui

$$a_t = 0\,; \quad a_r = -\frac{k}{\rho^2}$$

ossia accelerazione sempre centrale e proporzionale all'inverso del raggio.

$$a_r = \ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2 = -\frac{k}{\rho^2}$$

$$a_t = 2\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\theta}\right) = 0 \Rightarrow \rho^2\dot{\theta} = l\,(cost.) \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\rho^2}$$

$$\ddot{\rho} - \rho\frac{l^2}{\rho^4} = -\frac{k}{\rho^2} \Rightarrow \ddot{\rho} = \frac{l^2}{\rho^3} - \frac{k}{\rho^2} \Rightarrow 2\dot{\rho}\,\ddot{\rho} = 2l^2\frac{\dot{\rho}}{\rho^3} - 2k\frac{\dot{\rho}}{\rho^2}$$

$$\dot{\rho}^2 = \frac{-l^2}{\rho^2} + 2\frac{k}{\rho} + d\,(cost.) \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{-l^2}{\rho^2} + 2\frac{k}{\rho} + d} \Rightarrow \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\rho^2}{l}\sqrt{\frac{-l^2}{\rho^2} + 2\frac{k}{\rho} + d}$$

Le coordinate polari nel piano e un caso notevole

Queste informazioni sono fornite per completezza ma non fanno parte del programma d'esame

Consideriamo il caso in cui

$$a_t = 0; \quad a_r = -\frac{k}{\rho^2}$$

ossia accelerazione sempre centrale e proporzionale all'inverso del raggio.

$$\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{1}{\sqrt{-\rho^2 + 2\frac{k}{l}\rho^3 + d\frac{\rho^4}{l}}} \qquad \frac{d\theta}{d\rho} = \frac{1}{\sqrt{-\rho^2 + \frac{2}{h}\rho^3 + \rho^4\frac{(e^2-1)}{h^2}}}$$

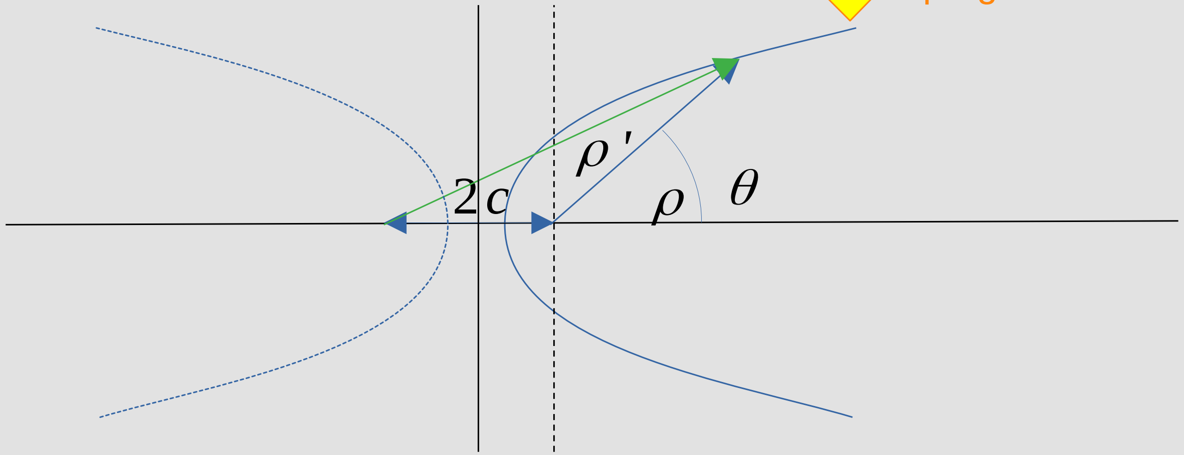
Possiamo riconoscere che

$$h = a(1-e^2) = \frac{l}{k}; \qquad d = l\frac{(e^2-1)}{h^2} = l(e^2-1)\frac{k^2}{l^2} = \frac{k^2}{l}(e^2-1) = \frac{-l}{ka}\frac{k^2}{l} = \frac{-k}{a}$$

Le coordinate polari nel piano e un caso notevole

In effetti l’eccentricità è legata ai parametri *l* (termine cinetico centripeto, sempre positivo ma non limitato) e *k* (termine attrattivo/repulsivo, che può cambiare segno), che godono di ampia libertà, come arbitrario è il parametro *d* (legato alla velocità e posizione iniziali). In altre parole, esistono combinazioni (con accelerazioni centrifughe o/o velocità molto grandi) per cui l’eccentricità può superare 1. In tal caso l’ellisse si trasforma in **iperbole**, di cui un solo ramo è accessibile:

Queste informazioni sono fornite per completezza ma non fanno parte del programma d’esame



***Iperbole**: luogo dei punti la <u>differenza</u> delle cui distanze da due fuochi è costante*

Le coordinate polari nel piano e un caso notevole

Nel caso particolare in cui l’eccentricità sia esattamente 1, la traiettoria diventa una parabola:

Queste informazioni sono fornite per completezza ma non fanno parte del programma d’esame

$d < 0$: **ellisse** (caso particolare: *circonferenza*)

$d = 0$: **parabola**

$d > 0$: **iperbole**

In ogni caso, la traiettoria è una **curva conica**.

Vedremo in seguito il senso fisico di questa condizione su *d*.