

DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI



I sistemi di punti materiali

I sistemi di punti materiali sono insiemi di punti materiali che hanno interazioni mutue più o meno forti. Un corpo esteso si studia come un sistema di punti materiali.

I corpi in vari stati di aggregazione possono essere studiati come sistemi di punti materiali. Tuttavia il punto materiale non corrisponde ad un'entità fisica ben precisa (per esempio l'atomo o la particella). È semplicemente la più piccola unità di materia del corpo che non abbia altro dettaglio rilevante per la descrizione del fenomeno che la propria massa. Così, in un gas monoatomico, gli atomi possono essere trattati come punti materiali per alcuni scopi. In un corpo rigido, potremmo considerare una porzione di materia più grande.

La dinamica dei sistemi di punti materiali non richiede nuovi principi fisici, ma si appoggia sui tre principi della dinamica già esposti.

I sistemi di punti materiali

Cominciamo con il definire il **centro di massa** di un sistema di punti materiali

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i; \quad M = \sum_i m_i \text{ è la massa del sistema}$$

Vediamo come si muove il centro di massa di un sistema:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d}{dt} \vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \sum_i \vec{p}_i; \quad \vec{P} = M \vec{v}_{CM} = \sum_i \vec{p}_i$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d}{dt} \vec{v}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}; \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = M \vec{a}_{CM} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

Il centro di massa si muove come un punto materiale che ha la massa del sistema e la sua quantità di moto

La Prima Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali

Consideriamo un sistema di punti materiali, soggetti a forze esterne al sistema e a forze interne.

Su ciascun punto i avremo:

$$\sum_i \sum_h \vec{F}_{\text{est},i,h} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{\text{int},i,j} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

definiamo:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \text{quantità di moto del sistema}$$

$$\sum_i \sum_h \vec{F}_{\text{est},i,h} = \vec{F}_{\text{est}} = \text{risultante delle forze esterne agenti sul sistema}$$

$$\sum_i \sum_j \vec{F}_{\text{int},i,j} = \vec{0} : \text{infatti } \vec{F}_{\text{int},i,j} = -\vec{F}_{\text{int},j,i} \text{ per il terzo principio}$$

La Prima Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali

Sommiamo le equazioni per tutti i punti materiali

$$\sum_i \sum_h \vec{F}_{\text{est},i,h} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{\text{int},i,j} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

definiamo:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \text{quantità di moto del sistema}$$

$$\sum_i \sum_h \vec{F}_{\text{est},i,h} = \vec{F}_{\text{est}} = \text{risultante delle forze esterne agenti sul sistema}$$

$$\sum_i \sum_j \vec{F}_{\text{int},i,j} = \vec{0}: \text{infatti } \vec{F}_{\text{int},i,j} = -\vec{F}_{\text{int},j,i}$$

Otteniamo:

$$\vec{F}_{\text{est}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

La derivata della quantità di moto totale del sistema di punti materiali è uguale alla risultante di tutte le forze esterne al sistema.

La Prima Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali

Elaboriamo sulla Prima Equazione Cardinale

$$\vec{F}_{est} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M \vec{a}_{CM}$$

Osservazioni:

- 1) Il sistema di punti materiali si muove come un punto materiale con tutta la massa concentrata nel centro di massa e soggetto solo alle forze esterne. Questo spiega perché possiamo modellare sistemi estesi come punti materiali quando non ci interessano i particolari del moto delle singole parti.
- 2) Le forze interne tra i vari punti del sistema non influenzano direttamente il moto del sistema del centro di massa, ma le forze esterne potrebbero dipendere dalla posizione e/o velocità dei singoli punti materiali.

La Seconda Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali

Consideriamo il momento angolare dei punti materiali rispetto ad un polo O e la loro somma

$$\vec{J}_O = \sum_i m_i \vec{r}_{O,i} \times \vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_{O,i} \times (m_i \vec{v}_i) = \sum_i \vec{r}_{O,i} \times \vec{p}_i$$

Riferiamo il momento angolare rispetto al centro di massa, introducendo la posizione di quest'ultimo rispetto al polo O:

$$\begin{aligned} \vec{J}_O &= \sum_i \vec{r}_{O,i} \times \vec{p}_i = \sum_i (\vec{r}_{O,CM} + \vec{r}_{CM,i}) \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_{O,CM} \times \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}_{CM,i} \times \vec{p}_i = \vec{r}_{O,CM} \times \sum_i \vec{p}_i + \vec{J}_{CM} = \\ &= \vec{r}_{O,CM} \times \vec{P} + \vec{J}_{CM} \end{aligned}$$

Teorema di König per il momento angolare: Il momento angolare rispetto ad un polo O è pari alla somma del momento angolare calcolato intorno al centro di massa e al momento angolare del sistema considerato concentrato nel sistema del centro di massa con la sua quantità di moto complessiva.

La Seconda Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali

Adesso valutiamo la variazione del momento angolare:

$$\frac{d\vec{J}_O}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} (\vec{r}_{O,i} \times \vec{p}_i) = \sum_i \frac{d\vec{r}_{O,i}}{dt} \times \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}_{O,i} \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{v}_i \times \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}_{O,i} \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{r}_{O,i} \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

Il primo termine è nullo perché la velocità di ciascun punto materiale è parallela alla sua quantità di moto

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{J}_O}{dt} &= \sum_i \vec{r}_{O,i} \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{r}_{O,i} \times \left(\sum_h \vec{F}_{\text{est},i,h} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{\text{int},i,j} \right) = \sum_i \sum_h \vec{r}_{O,i} \times \vec{F}_{\text{est},i,h} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_{O,i} \times \vec{F}_{\text{int},i,j} = \\ &= \sum_i \vec{r}_{O,i} \times \vec{F}_{\text{est},i} + \vec{0} \end{aligned}$$

Il secondo termine è nullo per il terzo principio della dinamica: $\vec{r}_{O,i} \times \vec{F}_{\text{int},i,j} = -\vec{r}_{O,j} \times \vec{F}_{\text{int},j,i}$

I contributi delle forze interne si annullano a coppie, infatti sono coppie di braccio nullo

La Seconda Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali

Otteniamo la seconda equazione cardinale:

$$\frac{d\vec{J}_O}{dt} = \sum_i \vec{r}_{O,i} \times \vec{F}_{\text{est},i} = \sum_i \vec{M}_{\text{est},i}$$

La derivata del momento angolare di un sistema di punti materiali è pari alla somma dei momenti delle sole forze esterne, calcolati tenendo conto dei loro effettivi punti di applicazione

Il momento di una forza ha dimensioni $[\mathbf{M}][\mathbf{L}^2][\mathbf{T}^{-2}]$ e si misura in Nm

Il momento angolare di un punto materiale o di un sistema ha dimensioni $[\mathbf{M}][\mathbf{L}^2][\mathbf{T}^{-1}]$ e si misura in $kg\ m^2/s$

Per un punto materiale in moto circolare intorno ad un asse, il momento angolare intorno al centro di rotazione è:

$$\vec{J}_{O,P} = m \vec{r}_{O,P} \times \vec{v} = m \vec{r}_{O,P} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{O,P}) = m r_{O,P}^2 \vec{\omega} = I_{O,P} \vec{\omega}$$

$I_{O,P}$ è il momento d'inerzia del punto P rispetto all'asse O

La dinamica dei sistemi di punti materiali

Le equazioni cardinali della dinamica dei sistemi di punti materiali forniscono 6 equazioni scalari

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{\text{est},i}$$
$$\frac{d\vec{J}_o}{dt} = \sum_i \vec{M}_{\text{est},i}$$

Esse sono linearmente indipendenti se il sistema comprende almeno due punti materiali.

Per sistemi isolati abbiamo:

ossia quantità di moto e momento angolare totale di un sistema isolato di punti materiali si conservano

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$$
$$\frac{d\vec{J}_o}{dt} = \vec{0}$$

Il moto dei razzi

I razzi sono sistemi isolati. Si muovono spingendo indietro parte della propria massa, e ricevono, per il III principio della dinamica, una spinta in verso opposto.

Consideriamo un razzo che espelle una quantità di propellente dm con velocità V_{jet} .

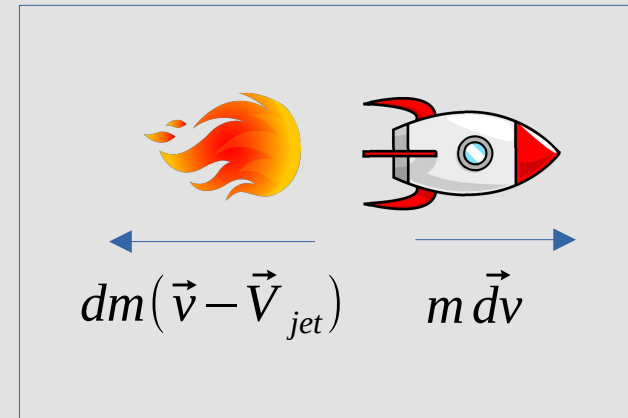
$$\vec{P} = m \vec{v}; \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}; \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt} (\vec{v} - \vec{V}_{jet}) = \vec{0}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \vec{V}_{jet} = 0 \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = - \frac{dm}{dt} \vec{V}_{jet} \quad \text{proiettiamo su } x$$

$$m \frac{dv_x}{dt} = - \frac{dm}{dt} V_{jet} \Rightarrow \frac{dm}{m} = - \frac{dv_x}{V_{jet}} \Rightarrow \int_{m_i}^{m_f} \frac{dm}{m} = - \int_{v_i}^{v_f} \frac{1}{V_{jet}} dv$$

$$\log \frac{m_f}{m_i} = \frac{(v_i - v_f)}{V_{jet}}; \Rightarrow v_f = v_i + V_{jet} \log \frac{m_i}{m_f}$$

Il termine di massa in logaritmo non sarà mai molto grande
È essenziale che sia grande la velocità del getto



La statica dei sistemi di punti materiali

Le equazioni cardinali della dinamica nel caso statico diventano:

$$\sum_i \vec{F}_{\text{est},i} = \vec{0}$$

$$\sum_i \vec{M}_{\text{est},i} = \vec{0}$$

Esse sono linearmente indipendenti se il sistema i comprende almeno due punti materiali.

Se le equazioni sono in numero sufficiente a determinare tutte le forze, si dice che il sistema è *isostatico*.

Se le equazioni sono insufficienti a determinare tutte le forze, si dice che il sistema è *iperstatico*.

La statica dei sistemi di punti materiali

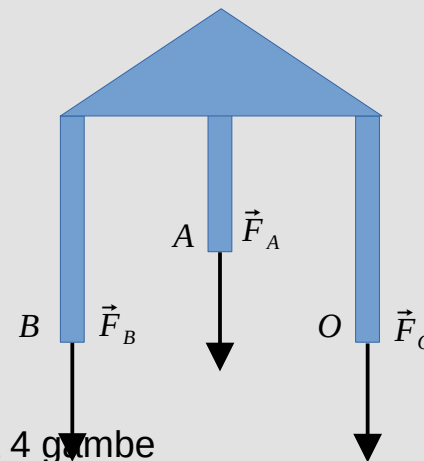
Esempio di problema isostatico: determinare le forze agenti su ciascun piede di un tavolino a 3 gambe

$$F_{zO} + F_{zA} + F_{zB} = -Mg$$

$$(\vec{r}_{O,A} \times \vec{F}_A + \vec{r}_{O,B} \times \vec{F}_B) \cdot \hat{i} = 0$$

$$(\vec{r}_{O,A} \times \vec{F}_A + \vec{r}_{O,B} \times \vec{F}_B) \cdot \hat{j} = 0$$

Le altre equazioni sono identità $0 = 0$



Esempio di problema iperstatico: determinare le forze agenti su ciascun piede di un tavolino a 4 gambe

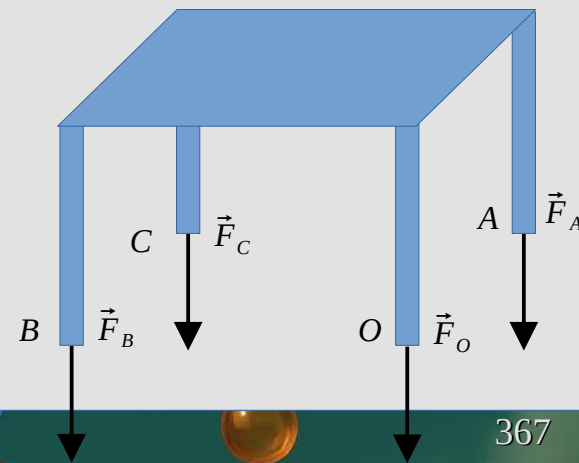
$$F_{zO} + F_{zA} + F_{zB} + F_{zC} = -Mg$$

$$(\vec{r}_{O,A} \times \vec{F}_A + \vec{r}_{O,B} \times \vec{F}_B + \vec{r}_{O,C} \times \vec{F}_C) \cdot \hat{i} = 0$$

$$(\vec{r}_{O,A} \times \vec{F}_A + \vec{r}_{O,B} \times \vec{F}_B + \vec{r}_{O,C} \times \vec{F}_C) \cdot \hat{j} = 0$$

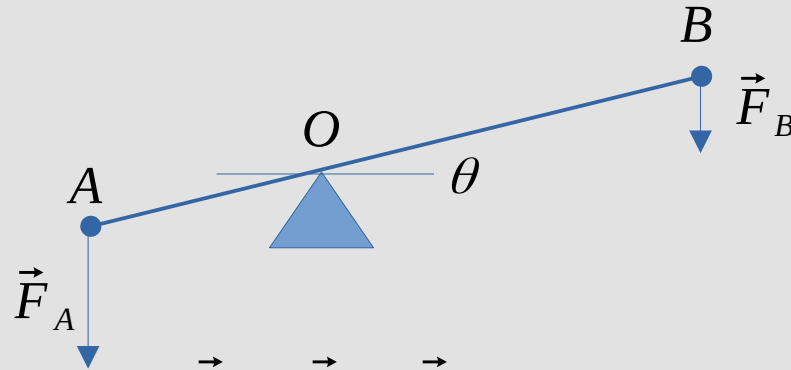
Le altre equazioni sono identità $0 = 0$

Vanno specificate altre condizioni, per esempio con deformazioni elastiche



La statica dei sistemi di punti materiali

Esempio di applicazione: le leve



$$\vec{M}_A + \vec{M}_B = \vec{0}$$

$$\vec{M}_A \cdot \hat{k} + \vec{M}_B \cdot \hat{k} = 0$$

$$r_A F_A \cos \theta - r_B F_B \cos \theta = 0$$

$$r_A F_A = r_B F_B$$

L'energia cinetica dei sistemi di punti materiali

Definiamo l'energia cinetica di un sistema come la somma delle energie cinetiche dei singoli punti materiali

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$$

Consideriamo il moto del centro di massa e il moto dei punti materiali intorno al centro di massa:

$$\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{CM}$$

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}) \cdot (\vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + 2 \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}'_i \cdot \vec{v}_{CM} =$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + 2 \sum_i \frac{1}{2} \left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} - m_i \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} \right) \cdot \vec{v}_{CM}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \Rightarrow 2 \sum_i \frac{1}{2} \left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} - m_i \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} \right) \cdot \vec{v}_{CM} = 0$$

L'energia cinetica dei sistemi di punti materiali

Abbiamo quindi dimostrato **il teorema di König dell'energia cinetica di un sistema di punti materiali**:

$$K = K' + K_{CM}$$

$$K' = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

$$K_{CM} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

L'energia cinetica di un sistema di punti materiali è data dalla somma dell'energia cinetica del moto dei punti intorno al centro di massa e dell'energia cinetica del centro di massa, considerato come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema.

Questo teorema ha implicazioni più profonde di quel che sembra. Infatti, quando guardiamo un sistema apparentemente fermo macroscopicamente, dobbiamo tener presente che potrebbero esistere (e in genere ci sono) moti microscopici che contribuiscono in maniera considerevole all'energia totale.

Il lavoro e l'energia potenziale per un sistema di punti materiali

Torniamo alla definizione di lavoro elementare per un singolo punto materiale ed estendiamola ad un sistema di punti materiali

$$dL_i = (\vec{F}_{\text{est},i} + \vec{F}_{\text{int},i}) \cdot d\vec{s}_i$$

E per il lavoro totale si ha:

$$dL = \sum_i (\vec{F}_{\text{est},i} + \vec{F}_{\text{int},i}) \cdot d\vec{s}_i = dL_{\text{cons}} + dL_{\text{diss}}$$

Qui sono evidenziati il lavoro per le forze conservative e per quelle dissipative

$$dL = -dU + dL_{\text{diss}}$$

$$dK = -dU + dL_{\text{diss}} \Rightarrow dK + dU = dL_{\text{diss}} \leq 0$$

Attenzione all'energia potenziale di interazione tra diversi punti del sistema: si scrive una volta sola!

Il lavoro e l'energia potenziale per un sistema di punti materiali

Energia potenziale totale: è la somma delle energie potenziali dovute alle forze esterne al sistema e a quella delle forze interne al sistema.

L'energia potenziale delle forze esterne dipende dalle posizioni dei punti materiali

L'energia potenziale delle forze interne dipende dalle posizioni **reciproche** dei vari punti materiali

$$U_{\text{est}}(\vec{r}_i) \Rightarrow \vec{F}_{\text{est},i} = -\text{grad} U_{\text{est}}(\vec{r}_i)$$

$$U_{\text{int}}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \Rightarrow \vec{F}_{\text{int},i} = -\text{grad}_i \sum_{j \neq i} U_{\text{int}}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$$

Esempio: due punti materiali connessi da una molla

$$U_{\text{int}} = \frac{1}{2} k (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \cdot (\vec{r}_A - \vec{r}_B); \quad \vec{F}_A = k (\vec{r}_B - \vec{r}_A); \quad \vec{F}_B = k (\vec{r}_A - \vec{r}_B)$$



C'è un solo termine di energia potenziale per coppia di punti!

Energia meccanica per un sistema di punti materiali

L'energia meccanica totale per un sistema di punti materiali è la somma delle energie cinetiche e potenziali

$$E = K_{CM} + K' + \sum_i U_{\text{est},i} + \sum_{j>i} U_{\text{int},ij}$$

La sommatoria su j è costruita in modo da evitare doppi conteggi

I corpi rigidi

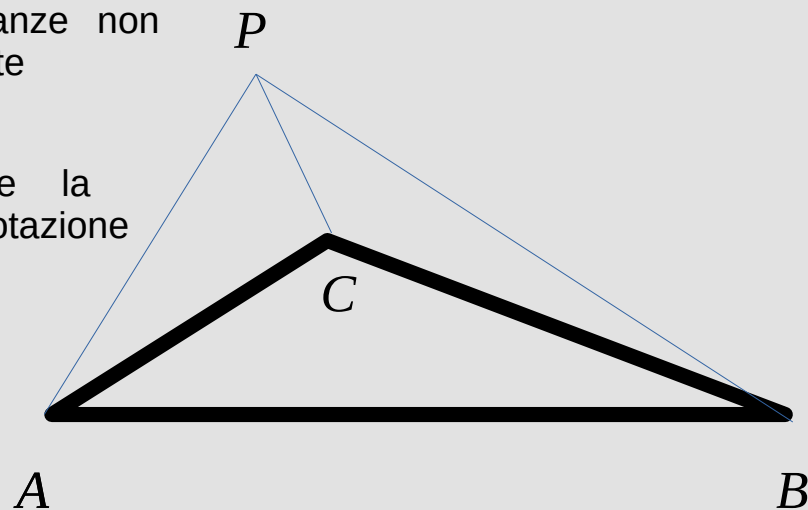
I corpi rigidi

Un sistema di punti materiali si definisce **corpo rigido** se tutti i suoi punti rispettano il **vincolo di rigidità**, ossia l'invarianza delle distanze mutue.

$$\frac{d(\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|)}{dt} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Se conosciamo le posizioni di tre punti materiali di un corpo rigido, conosciamo le posizioni di tutti i punti. Infatti, poiché le distanze non possono variare, la posizione di ciascun punto P è univocamente determinata dall'indeformabilità dei triangoli ABP , BCP , CAP .

Due punti soltanto (AB) non basterebbero ad individuare la posizione di tutti gli altri perché rimarrebbe libera la rotazione attorno alla retta dei due punti.



I corpi rigidi

Le coordinate dei tre punti corrispondono a 9 parametri in tutto.

Abbiamo però tre equazioni di vincolo:

$$\|\vec{r}_A - \vec{r}_B\| = \text{cost}_{AB}$$

$$\|\vec{r}_B - \vec{r}_C\| = \text{cost}_{BC}$$

$$\|\vec{r}_C - \vec{r}_A\| = \text{cost}_{CA}$$

Quindi il numero dei parametri liberi è $9-3=6$.

Le equazioni cardinali della dinamica dei sistemi di punti materiali sono 2 equazioni vettoriali, ossia **6** equazioni scalari.

Il moto di un corpo rigido è completamente determinato a partire dalle equazioni cardinali della dinamica dei sistemi di punti materiali.

I corpi rigidi

Consideriamo la condizione di vincolo di rigidità:

$$\frac{d(\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|)}{dt} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Equivalentemente possiamo scrivere

$$\frac{d\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2}{dt} = 0 \quad \forall i \neq j$$

$$\frac{d\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2}{dt} = \frac{d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{dt} = 2 \frac{d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{dt} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 2(\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 0$$

La differenza delle velocità di due punti è sempre ortogonale al vettore della loro posizione relativa. Pertanto deve esistere un vettore $\vec{\omega}_{ij}$ che consenta di scrivere:

$$(\vec{v}_i - \vec{v}_j) = \vec{\omega}_{ij} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 0$$

I corpi rigidi

Possono esistere diverse velocità angolari in uno stesso istante?

Supponiamo di avere tre punti materiali e diverse velocità angolari

$$(\vec{v}_a - \vec{v}_b) = \vec{\omega}_{ab} \times (\vec{r}_a - \vec{r}_b)$$

$$(\vec{v}_a - \vec{v}_c) = \vec{\omega}_{ac} \times (\vec{r}_a - \vec{r}_c)$$

$$\Rightarrow$$
$$(\vec{v}_b - \vec{v}_c) = \vec{\omega}_{ac} \times (\vec{r}_a - \vec{r}_c) - \vec{\omega}_{ab} \times (\vec{r}_a - \vec{r}_b) = \vec{\omega}_{bc} \times (\vec{r}_b - \vec{r}_c)$$

dalla regola del prodotto misto:

$$\vec{\omega}_{bc} \times (\vec{r}_b - \vec{r}_c) \cdot (\vec{r}_b - \vec{r}_c) = 0$$

$$\vec{\omega}_{ac} \times (\vec{r}_a - \vec{r}_c) \cdot (\vec{r}_b - \vec{r}_c) = \vec{\omega}_{ab} \times (\vec{r}_a - \vec{r}_b) \cdot (\vec{r}_b - \vec{r}_c)$$

I corpi rigidi

Possono esistere diverse velocità angolari in uno stesso istante?

Supponiamo di avere tre punti materiali e diverse velocità angolari

$$\begin{aligned}(\vec{r}_b - \vec{r}_c) \times \vec{\omega}_{ac} \cdot (\vec{r}_a - \vec{r}_c) &= (\vec{r}_b - \vec{r}_c) \times \vec{\omega}_{ab} \cdot (\vec{r}_a - \vec{r}_b) \\(\vec{r}_b - \vec{r}_c) \times \vec{\omega}_{ac} \cdot (\vec{r}_a - \vec{r}_b + \vec{r}_b - \vec{r}_c) &= (\vec{r}_b - \vec{r}_c) \times \vec{\omega}_{ab} \cdot (\vec{r}_a - \vec{r}_b) \\(\vec{r}_b - \vec{r}_c) \times \vec{\omega}_{ac} \cdot (\vec{r}_a - \vec{r}_b) &= (\vec{r}_b - \vec{r}_c) \times \vec{\omega}_{ab} \cdot (\vec{r}_a - \vec{r}_b)\end{aligned}$$

La componente di ω_{ac} ortogonale al primo vettore e lungo il secondo è identica a quella di ω_{ab} .

Ripetendo il ragionamento con tutte le altre combinazioni dei punti A, B, C e delle loro velocità si conclude che tutte le componenti delle velocità angolari sono uguali, quindi dev'esserci un solo vettore velocità angolare per tutto il corpo rigido.

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_{CM})$$

L'atto di moto di un corpo rigido è (al massimo) **rototraslatorio**

I corpi rigidi e il momento d'inerzia

L'espressione del momento angolare è: $\vec{J}_O = \vec{r}_{O,CM} \times \vec{P} + \vec{J}_{CM}$

E rispetto al centro di massa: $\vec{J}_{CM} = \sum_i \vec{r}'_i \times (m_i \vec{v}'_i)$

$$\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{CM} = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_{CM}) - \vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \times \vec{r}'_i$$

$$\vec{J}_{CM} = \sum_i m_i \vec{r}'_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)$$

Vediamo che:

$$\begin{aligned} \vec{r}'_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) &= \vec{r}'_i \times \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ r'_{ix} & r'_{iy} & r'_{iz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r'_{ix} & r'_{iy} & r'_{iz} \\ (\omega_y r'_{iz} - \omega_z r'_{iy}) & (\omega_z r'_{ix} - \omega_x r'_{iz}) & (\omega_x r'_{iy} - \omega_y r'_{ix}) \end{vmatrix} = \\ &= r'^2_i \vec{\omega} - (\vec{r}'_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}'_i \end{aligned}$$

I corpi rigidi e il momento d'inerzia

Pertanto abbiamo:

$$\vec{J}_{CM} = \sum_i m_i \vec{r}'_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) = \sum_i m_i r_i'^2 \vec{\omega} - \sum_i m_i (\vec{r}'_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}'_i$$

Si può mettere tutto ciò in una forma alternativa, matriciale o tensoriale, introducendo la *matrice d'inerzia* o il *tensore di inerzia*.

$$\vec{J}_{CM} = \mathbf{I} \vec{\omega} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} J_{CMx} \\ J_{CMy} \\ J_{CMz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad \text{con } I_{xy} = I_{yx}, I_{xz} = I_{zx}, I_{yz} = I_{zy}$$

Un tensore trasforma un vettore in un altro vettore

I tensori rappresentano applicazioni lineari

$$\mathbf{I}(\vec{a} + \vec{b}) = \mathbf{I}\vec{a} + \mathbf{I}\vec{b}$$

$$\mathbf{I}(\alpha \vec{v}) = \alpha \mathbf{I}\vec{v}$$

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{yx} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = \sum_i \begin{bmatrix} r_{iy}'^2 + r_{iz}'^2 & -r'_{ix} r'_{iy} & -r'_{ix} r'_{iz} \\ -r'_{iy} r'_{ix} & r_{ix}'^2 + r_{iz}'^2 & -r'_{iy} r'_{iz} \\ -r'_{iz} r'_{ix} & -r'_{iz} r'_{iy} & r_{ix}'^2 + r_{iy}'^2 \end{bmatrix}$$

I corpi rigidi e il momento d'inerzia

Le quantità sulla diagonale sono dette *momenti d'inerzia* rispetto a ciascun asse. Le quantità fuori diagonale sono dette *momenti deviatorici*. Si può mostrare che esistono sempre tre assi ortogonali rispetto ai quali i momenti deviatorici si annullano. Questi assi si chiamano *assi centrali d'inerzia*. Se un corpo rigido è dotato di simmetrie, questi assi sono gli assi di simmetria del corpo. **Se la velocità angolare è allineata con uno di questi assi**, si ha:

$$\vec{J}_{CM} = \sum_i m_i r_i'^2 \vec{\omega} = I_{\hat{\omega}} \vec{\omega}$$

La grandezza I_{ω} è detta momento d'inerzia del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione specificato da ω . Solo in questi casi, il vettore momento angolare è parallelo ad ω . In generale, valgono relazioni più complesse.

Per il momento angolare rispetto ad un polo O qualsiasi si ha:

$$\vec{J}_O = \vec{r}_{O,CM} \times \vec{P} + \vec{J}_{CM} = \vec{r}_{O,CM} \times \vec{P} + I_{\hat{\omega}} \vec{\omega}$$

I corpi rigidi e il momento d'inerzia

Le quantità sulla diagonale sono dette *momenti d'inerzia* rispetto a ciascun asse. Le quantità fuori diagonale sono dette *momenti deviatorici*. Si può mostrare che esistono sempre tre assi ortogonali rispetto ai quali i momenti deviatorici si annullano. Questi assi si chiamano *assi centrali d'inerzia*. Se un corpo rigido è dotato di simmetrie, questi assi sono gli assi di simmetria del corpo. **Se la velocità angolare è allineata con uno di questi assi**, si ha:

$$\vec{J}_{CM} = \sum_i m_i r_i'^2 \vec{\omega} = I_{\hat{\omega}} \vec{\omega}$$

La matrice assume la forma

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{yy} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \sum_i \begin{bmatrix} r_{iy}'^2 + r_{iz}'^2 & 0 & 0 \\ 0 & r_{ix}'^2 + r_{iz}'^2 & 0 \\ 0 & 0 & r_{ix}'^2 + r_{iy}'^2 \end{bmatrix}$$

I corpi rigidi e il momento d'inerzia

La matrice d'inerzia è *simmetrica* e *definita positiva*, ossia

$$\vec{\omega} \cdot (\mathbf{I} \vec{\omega}) > 0 \quad \forall \vec{\omega} \neq \vec{0}$$

$$\vec{\omega}_a \cdot (\mathbf{I} \vec{\omega}_b) = \vec{\omega}_b \cdot (\mathbf{I} \vec{\omega}_a) \quad \forall \vec{\omega}_a, \vec{\omega}_b$$

Per la maggior parte delle applicazioni, si fa in modo che l'asse di rotazione sia un asse centrale d'inerzia. In tal caso

$$\vec{J}_{CM} = \sum_i m_i r_i^2 \vec{\omega} = I_{\hat{\omega}} \vec{\omega}$$

e quindi il momento angolare è parallelo alla velocità angolare.

In generale, se l'asse di rotazione non è un asse centrale di inerzia, accadono due cose:

- 1) Il momento angolare **non** è parallelo alla velocità angolare
- 2) se il sistema è isolato, **il momento angolare è costante** ma **la velocità angolare e l'asse di rotazione variano!**

$$\vec{J}_{CM} = \mathbf{I} \vec{\omega}$$

I corpi rigidi e il momento d'inerzia

Sotto l'ipotesi che l'asse di rotazione sia un asse centrale d'inerzia (in generale non è vero) possiamo scrivere:

$$\frac{d\vec{J}_O}{dt} = \left(\frac{d}{dt} \vec{r}_{O,CM} \right) \times \vec{P} + \vec{r}_{O,CM} \times \frac{d\vec{P}}{dt} + \frac{d}{dt} \vec{J}_{CM} = \vec{r}_{O,CM} \times \frac{d\vec{P}}{dt} + \frac{d}{dt} (\mathbf{I} \vec{\omega}) = \vec{r}_{O,CM} \times \frac{d\vec{P}}{dt} + \left(\frac{d}{dt} \mathbf{I} \right) \vec{\omega} + \mathbf{I} \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

(il primo termine si annulla perché la velocità è parallela alla quantità di moto).

Per un sistema isolato, nel centro di massa e per un asse centrale d'inerzia, abbiamo

$$\vec{0} = \sum_i \vec{M}_{\text{est},i} = \frac{d}{dt} (I_{\hat{\omega}} \vec{\omega}) = \frac{dI_{\hat{\omega}}}{dt} \vec{\omega} + I_{\hat{\omega}} \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Se una ballerina comincia un giro (piroetta) con le braccia aperte e poi le chiude, la velocità angolare aumenterà perché il momento d'inerzia sta diminuendo e il prodotto deve rimanere costante

I corpi rigidi e il momento d'inerzia

Nel sistema del centro di massa, con momento d'inerzia costante e se l'asse di rotazione non varia, possiamo scrivere:

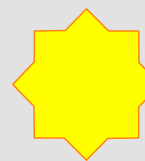
$$\sum_i \vec{M}_{\text{est},i} = I_{\hat{\omega}} \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Questo è uno schema di applicazione piuttosto comune.

Se proiettiamo lungo la direzione di ω abbiamo:

$$\sum_i \vec{M}_{\text{est},i} \cdot \hat{\omega} = I_{\hat{\omega}} \frac{d\omega}{dt} = I_{\hat{\omega}} \alpha$$

I corpi rigidi e il momento d'inerzia



Queste informazioni sono fornite per completezza ma non fanno parte del programma d'esame

Vediamo il caso generale di rotazione intorno ad un asse qualsiasi.

S'intende un prodotto riga per colonna.

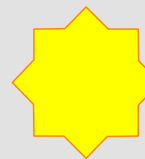
$$I \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$I \vec{\omega} = (I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z) \hat{i} + (I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z) \hat{j} + (I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z) \hat{k}$$

Osserviamo che in un corpo rigido i coefficienti della matrice d'inerzia sono costanti **nel sistema di riferimento del corpo**, il quale però sta ruotando: e quindi compaiono, al solito, le derivate dei versori di base.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (I \vec{\omega}) = & (I_{xx} \dot{\omega}_x + I_{xy} \dot{\omega}_y + I_{xz} \dot{\omega}_z) \hat{i} + (I_{yx} \dot{\omega}_x + I_{yy} \dot{\omega}_y + I_{yz} \dot{\omega}_z) \hat{j} + (I_{zx} \dot{\omega}_x + I_{zy} \dot{\omega}_y + I_{zz} \dot{\omega}_z) \hat{k} + \\ & + (I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z) \dot{\hat{i}} + (I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z) \dot{\hat{j}} + (I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z) \dot{\hat{k}} \end{aligned}$$

I corpi rigidi e il momento d'inerzia



Queste informazioni sono fornite per completezza ma non fanno parte del programma d'esame

Ricordiamo che: $\dot{\hat{i}} = \vec{\omega} \times \hat{i}; \dot{\hat{j}} = \vec{\omega} \times \hat{j}; \dot{\hat{k}} = \vec{\omega} \times \hat{k}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(I \vec{\omega}) &= (I_{xx} \dot{\omega}_x + I_{xy} \dot{\omega}_y + I_{xz} \dot{\omega}_z) \hat{i} + (I_{yx} \dot{\omega}_x + I_{yy} \dot{\omega}_y + I_{yz} \dot{\omega}_z) \hat{j} + (I_{zx} \dot{\omega}_x + I_{zy} \dot{\omega}_y + I_{zz} \dot{\omega}_z) \hat{k} + \\ &+ \vec{\omega} \times \left[(I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z) \hat{i} + (I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z) \hat{j} + (I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z) \hat{k} \right] = \\ &= I \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times I \vec{\omega} \end{aligned}$$

Nel caso particolare in cui l'asse di rotazione sia un asse centrale d'inerzia,

$$I \vec{\omega} = I_{\hat{\omega}} \vec{\omega} \Rightarrow \vec{\omega} \times I_{\hat{\omega}} \vec{\omega} = I_{\hat{\omega}} \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \vec{0}$$

I corpi rigidi e l'energia - 1

Torniamo al teorema di König sull'energia cinetica considerando la rotazione intorno ad un asse centrale d'inerzia:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) = \\
 &= \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i (\omega r'_{i\perp})^2 = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r'_{i\perp}{}^2 = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{\hat{\omega}} \omega^2
 \end{aligned}$$

Per un corpo rigido rotante attorno ad un asse centrale d'inerzia, l'energia cinetica assume la forma

$$K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{\hat{\omega}} \omega^2$$

L'energia cinetica di un corpo rigido si compone di un termine traslazionale (del centro di massa) e un termine rotazionale (intorno al centro di massa)

I corpi rigidi e l'energia - 2

Esplicitiamo la componente rotazionale

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) = \\
 &= \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i [(\omega_y r'_{iz} - \omega_z r'_{iy})^2 + (\omega_z r'_{ix} - \omega_x r'_{iz})^2 + (\omega_x r'_{iy} - \omega_y r'_{ix})^2] = \\
 &= \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i [\omega_x^2 (r'^2_{iy} + r'^2_{iz}) + \omega_y^2 (r'^2_{ix} + r'^2_{iz}) + \omega_z^2 (r'^2_{ix} + r'^2_{iy}) + \\
 &\quad - 2 \omega_x \omega_y r'_{ix} r'_{iy} - 2 \omega_x \omega_z r'_{ix} r'_{iz} - 2 \omega_y \omega_z r'_{iy} r'_{iz}] = \\
 &= \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \vec{\omega} \cdot (\mathbf{I} \vec{\omega})
 \end{aligned}$$

Anche nel caso più generale, l'energia cinetica di un corpo rigido si compone di un termine traslazionale (del centro di massa) e un termine rotazionale (intorno al centro di massa)

Il lavoro delle forze esterne nei corpi rigidi

Partiamo dalla definizione di lavoro ed elaboriamo

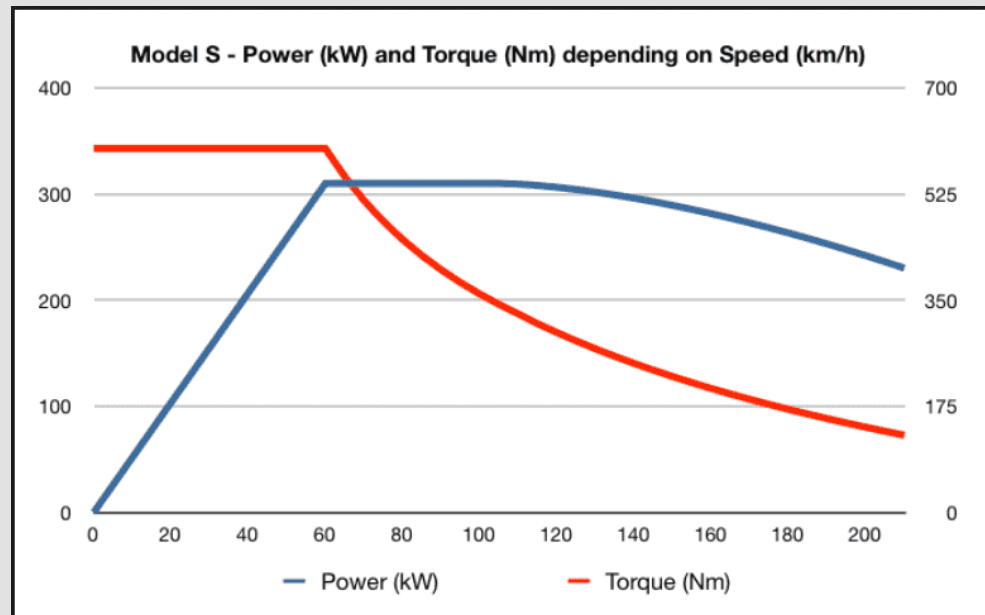
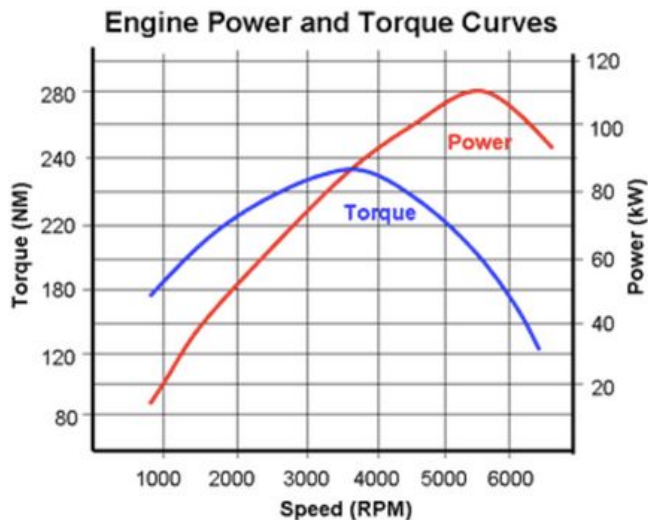
$$\begin{aligned}
 dL_{\text{est}} &= \sum_i \sum_h \vec{F}_{\text{est},h,i} \cdot d\vec{s}_i = \sum_i \vec{F}_{\text{est},i} \cdot d\vec{s}_i = \sum_i \vec{F}_{\text{est},i} \cdot \frac{d\vec{s}_i}{dt} dt = \\
 &= \sum_i \vec{F}_{\text{est},i} \cdot \vec{v}_i dt = \sum_i \vec{F}_{\text{est},i} \cdot (\vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i) dt = \sum_i \vec{F}_{\text{est},i} \cdot \vec{v}_{CM} dt + \sum_i \vec{F}_{\text{est},i} \cdot \vec{\omega} \times \vec{r}'_i dt = \\
 &= \vec{F}_{\text{est}} \cdot \vec{v}_{CM} dt + \sum_i \vec{\omega} \cdot \vec{r}'_i \times \vec{F}_{\text{est},i} dt = \\
 &= \vec{F}_{\text{est}} \cdot \vec{v}_{CM} dt + \vec{M}_{\text{est},CM} \cdot \vec{\omega} dt = \vec{F}_{\text{est}} \cdot d\vec{S}_{CM} + \vec{M}_{\text{est},CM} \cdot d\vec{\theta}
 \end{aligned}$$

Dove \mathbf{F}_{est} e $\mathbf{M}_{\text{est},CM}$ sono rispettivamente forza risultante di tutte le forze esterne e momento di tutte le forze esterne rispetto al centro di massa, e il vettore $d\vec{\theta}$ è parallelo al vettore velocità angolare e modulo pari al prodotto della velocità angolare per dt .

Applicazione: curve di coppia e potenza di motori per autotrazione

La “coppia” di un motore è il suo momento torcente M . La potenza è ovviamente $M\omega$.

Internal combustion torque delivery



Perché il regime di coppia massima e quello di potenza massima sono diversi?

Assi di rotazione non passanti per il centro di massa – Teorema di Huygens-Steiner

Supponiamo che l'asse di rotazione non passi per il centro di massa

Il disco in figura potrebbe ruotare intorno all'asse a' anziché intorno all'asse a

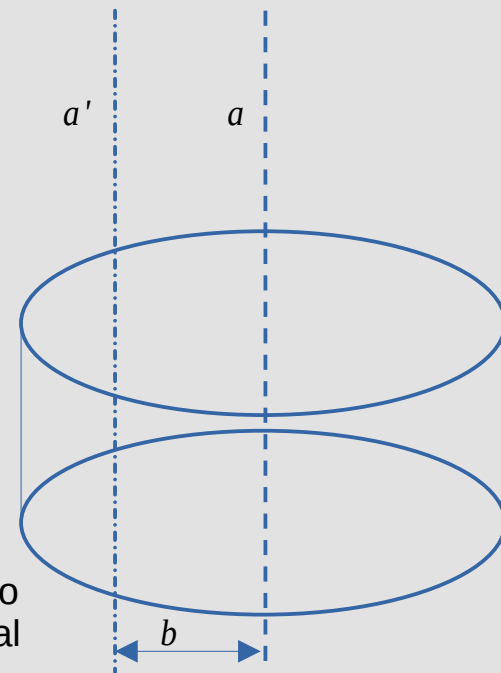
Indichiamo con b la distanza tra gli assi

$$K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{\hat{\omega}} \omega^2 = \frac{1}{2} M (\omega b)^2 + \frac{1}{2} I_{\hat{\omega}} \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} M b^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_{\hat{\omega}} \omega^2 = \frac{1}{2} I'_{\hat{\omega}} \omega^2$$

$$I'_{\hat{\omega}} = I_{\hat{\omega}} + M b^2$$

Il teorema di Huygens-Steiner, o degli assi paralleli, mostra che il momento d'inerzia rispetto ad un asse non passante per il centro di massa si ottiene aggiungendo al momento d'inerzia centrale il momento d'inerzia del centro di massa rispetto all'asse



Rotolamento senza strisciamento

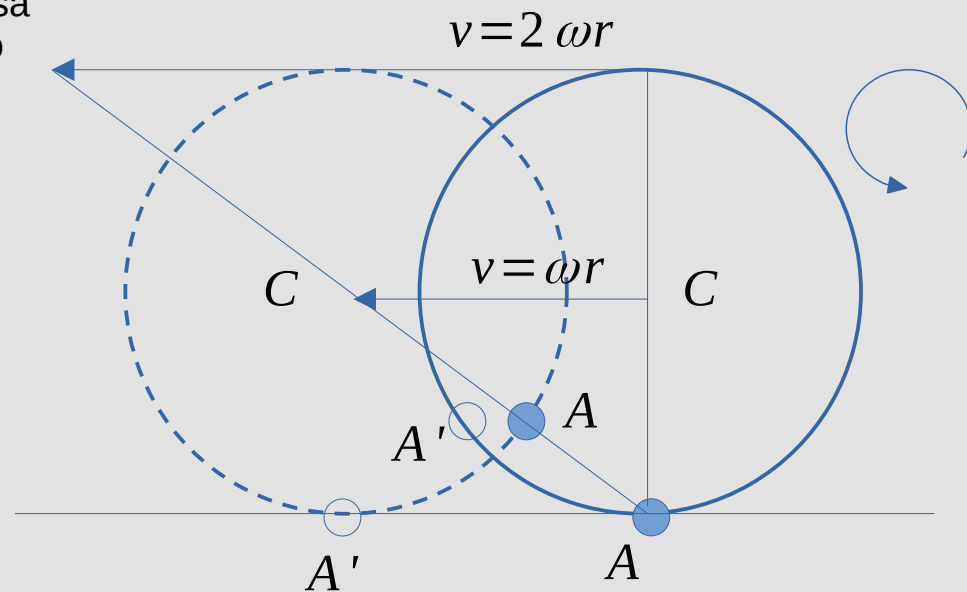
Un disco (o ruota) appoggiato su un piano rotola senza strisciare se il punto di contatto è istantaneamente fermo.

Se questo è vero, l'asse di rotazione del corpo rigido passa per il punto di contatto, e quindi tutto il corpo sta ruotando intorno a quel punto

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{CM}) + \vec{v}_{CM}$$

$$\vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \times (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_A)$$

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{CM}) + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_A) = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_A)$$



Implicazioni fisiche del momento d'inerzia

Nella dinamica rotazionale, il momento d'inerzia ha un ruolo simile a quello della massa nei moti puramente traslatori

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$L = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s}$$

$$P = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\vec{M} = I \vec{\alpha} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$L = \vec{M} \cdot \Delta \vec{\theta}$$

$$P = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Implicazioni fisiche del momento d'inerzia

Il momento d'inerzia scala con il quadrato della distanza dall'asse di rotazione: a parità di massa totale, una distribuzione di punti materiali ha un momento d'inerzia (molto) maggiore se i punti sono più lontani.

Per una distribuzione discreta di punti materiali, rotanti intorno all'asse z passante per l'origine:

$$M_{tot} = \sum_i^N m_i \quad \text{massa totale}$$

$$I = \sum_i^N m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad \text{momento d'inerzia}$$

Per una distribuzione continua con densità ρ in un volume V :

$$M_{tot} = \int_V \rho(x, y, z) dx dy dz$$

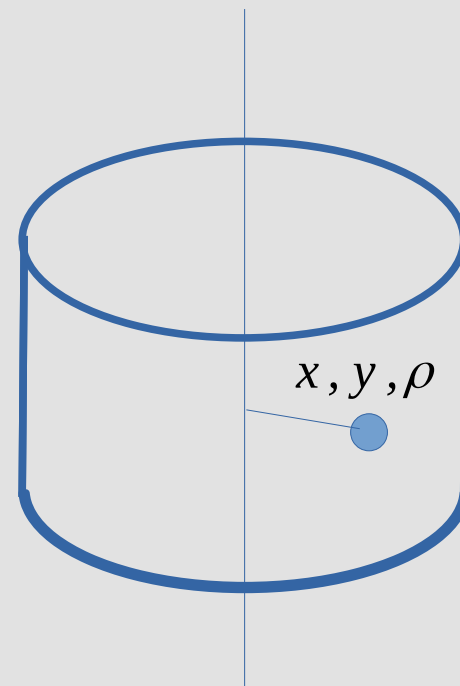
$$I = \int_V \rho(x, y, z) (x^2 + y^2) dx dy dz$$

Implicazioni fisiche del momento d'inerzia

Momento d'inerzia di un disco (cilindro) omogeneo

$$M_{tot} = \int_V \rho dx dy dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho r dr d\phi dz =$$
$$= \rho h 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2 h \rho$$

$$I = \int_V \rho(x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho r^3 dr d\phi dz =$$
$$= \rho h 2\pi \frac{R^4}{4} = \pi \frac{R^4}{2} h \rho = M_{tot} \frac{R^2}{2}$$



Implicazioni fisiche del momento d'inerzia

Momento d'inerzia di un cilindro cavo

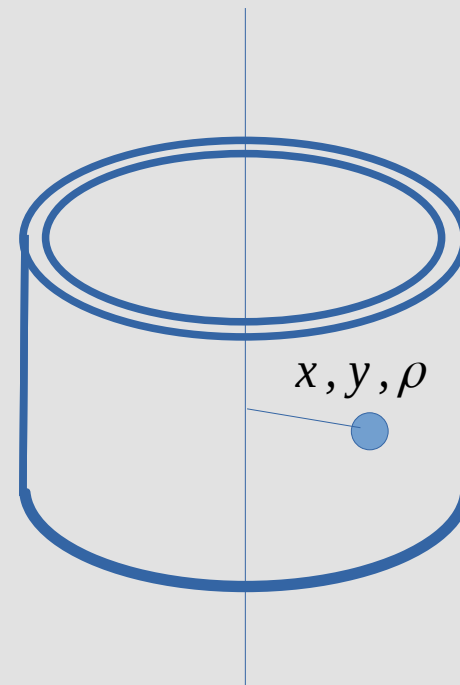
Possiamo ottenerlo come differenza del momento d'inerzia tra il cilindro esterno e quello interno

$$I = \int_V \rho (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} \rho r^3 dr d\phi dz =$$

$$= \rho h 2\pi \frac{(R_e^4 - R_i^4)}{4} = \pi (R_e^2 - R_i^2) h \rho \frac{(R_e^2 + R_i^2)}{2} = M_{tot} \frac{(R_e^2 + R_i^2)}{2}$$

Se il cilindro è sottile

$$R_e \simeq R_i \simeq R \Rightarrow I = M_{tot} R^2$$



Implicazioni fisiche del momento d'inerzia

Consideriamo un disco omogeneo (ruota) che cade su un piano inclinato rotolando senza strisciare.

Dalla condizione di rotolamento senza strisciamento si ha:

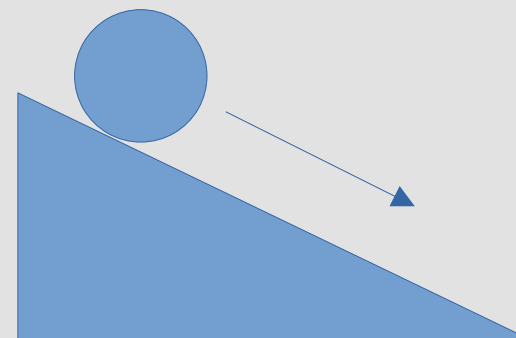
$$v = \omega R$$

Per l'energia cinetica quindi:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \frac{I}{r^2} v^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{I}{r^2} \right) v^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{m}{2} \right) v^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3m}{2} \right) v^2$$

L'energia potenziale rimane $U = m g z + \text{cost.}$

Quindi il disco cade più lentamente perché il momento d'inerzia "aggiunge inerzia"



Implicazioni fisiche del momento d'inerzia

Consideriamo un disco cavo omogeneo (ruota sottile) che cade su un piano inclinato rotolando senza strisciare.

Poiché la ruota è sottile tutta la massa è concentrata in periferia e il momento d'inerzia aumenta.

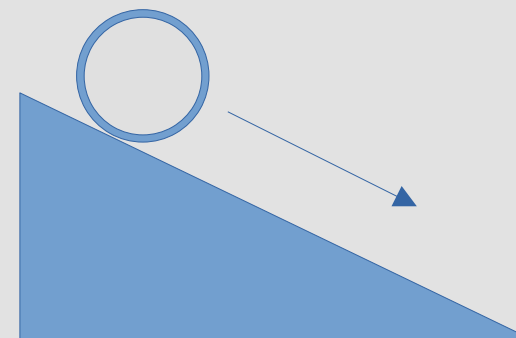
Per l'energia cinetica quindi:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{I}{r^2} \right) v^2 = \frac{1}{2} (m + m) v^2 = \frac{1}{2} (2m) v^2$$

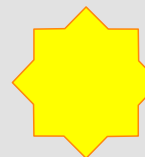
L'energia potenziale rimane $U = m g z + \text{cost.}$

Quindi la ruota si comporta come se avesse massa inerziale doppia rispetto alla massa gravitazionale

Anche osservandola “da molto lontano”, si capisce che non si tratta di un punto materiale: infatti ha una “struttura interna”, che un punto materiale non ha!



Calcolo del momento d'inerzia di una sfera



Queste informazioni sono fornite per completezza ma non fanno parte del programma d'esame

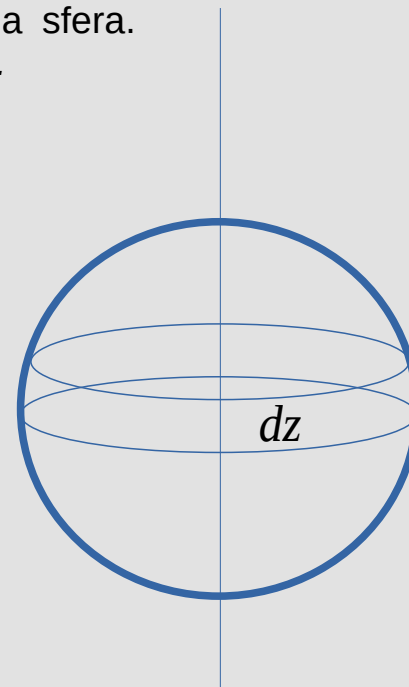
Avendo calcolato il momento d'inerzia del cilindro, è semplice calcolare quello della sfera. Possiamo considerarla costituita di fettine cilindriche a raggio variabile, ciascuna alta dz .

Il raggio di ogni fettina si ottiene dall'equazione della sfera.

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - z^2$$

$$I = \int_{-R}^R \frac{dI}{dz} dz = \int_{-R}^R \frac{dI}{dz} dz = \rho \frac{\pi}{2} \int_{-R}^R r^4(z) dz = \rho \frac{\pi}{2} \int_{-R}^R (R^2 - z^2)^2 dz =$$

$$= \rho \frac{\pi}{2} [R^4 - 2R^2 z^2 + z^4]_{-R}^R = \frac{8}{15} \rho \pi R^5 = \frac{2}{5} M R^2$$



urti



Urti

Introduciamo il concetto di **impulso di una forza**:

$$I_{\vec{F}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt$$

Se \mathbf{F} è la risultante di tutte le forze agenti su un punto materiale, possiamo scrivere:

$$I_{\vec{F}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt = \int_{t_i}^{t_f} m \vec{a}(t) dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

Ovvero: *l'impulso della risultante di tutte le forze su un punto materiale in un intervallo di tempo corrisponde alla variazione di quantità di moto di quel punto materiale tra l'istante iniziale e quello finale.*

L'impulso su un sistema di punti materiali è la somma degli impulsi sui singoli punti

$$I_{\sum \vec{F}_i} = \int_{t_i}^{t_f} \sum_i \vec{F}_i(t) dt$$

Attenzione: Non confondere mai impulso e lavoro! Sono due grandezze diverse, con dimensioni diverse.

Urti

Un processo di interazione tra due (o più) corpi si definisce urto se l'impulso delle forze esterne al sistema dei corpi interagenti è trascurabile per tutta la durata del processo.

Attenzione: nella definizione di urto non entra in alcun modo il concetto di contatto!

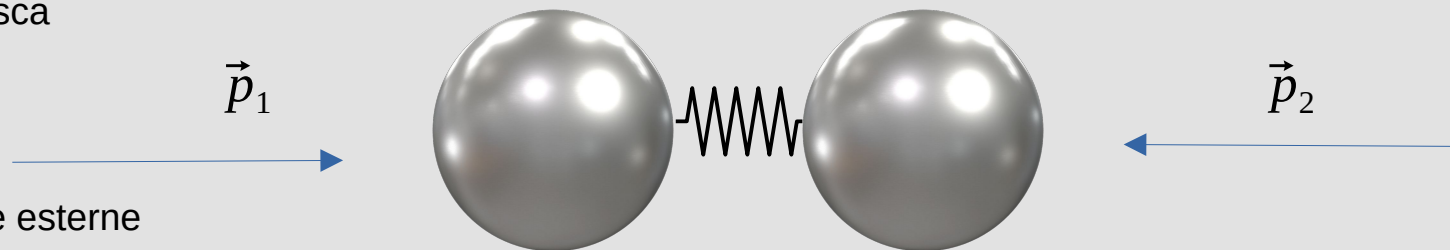
Questa definizione consente di trattare il sistema come se fosse isolato.

$$I_{\vec{F}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt \simeq \vec{0} \Rightarrow \vec{P}_f - \vec{P}_i \simeq \vec{0}$$

Se due sferette metalliche si urtano, possiamo immaginare che vi sia una molla dalla costante elastica molto grande che impedisca la compenetrazione

$$\vec{P}_f \simeq \vec{P}_i$$

L'impulso (ossia la variazione di quantità di moto) della forza elastica supera tutte le forze esterne



Urti

La conservazione della quantità di moto è uno dei capisaldi dello studio degli urti.

Gli urti sono uno strumento di indagine fondamentale: per conoscere un oggetto o un altro individuo, noi lo bombardiamo di fotoni, e indichiamo con il nome di *immagine* dell'oggetto o individuo la distribuzione di quelli che nell'urto vengono riflessi!

Nel sistema del centro di massa dei due corpi (o punti materiali) che collidono, si ha, per definizione di centro di massa (con " ' " indichiamo le quantità misurate nel sistema del centro di massa)

Dette \mathbf{p}_{1i} e \mathbf{p}_{2i} le quantità di moto prima dell'urto, si ha:

$$\vec{0} = \vec{P}'_{CM,f} = \vec{P}'_{CM,i}$$

$$\vec{0} = \vec{P}'_{CM,f} = \vec{p}'_{1i} + \vec{p}'_{2i} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}'_{2i} = -\vec{p}'_{1i}$$

Urti

Prima dell'urto, l'energia cinetica di un sistema di due punti materiali nel sistema del centro di massa vale:

$$K'_i = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{p_{1i}'^2}{2m_1} + \frac{p_{2i}'^2}{2m_2} = \frac{p_{1i}'^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

Se i due corpi non possono essere considerati punti materiali, ma devono essere trattati come due sistemi di punti materiali, la formula diventa più complicata:

$$K'_i = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + K''_{i1} + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + K''_{i2} = \frac{p_{1i}'^2}{2m_1} + \frac{p_{2i}'^2}{2m_2} + K''_{i1} + K''_{i2} = \frac{p_{1i}'^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + K''_{i1} + K''_{i2} \right)$$

K''_{i1} = energia cinetica nel centro di massa del sistema 1 nello stato iniziale

K''_{i2} = energia cinetica nel centro di massa del sistema 2 nello stato iniziale

Urti

In seguito all'urto, possono accadere varie cose:

- I due corpi rimbalzano inalterati (**urto elastico**)
- I due corpi si fondono in uno solo (**urto totalmente anelastico**)
- I due corpi vengono parzialmente alterati ma non si fondono (**urto parzialmente anelastico**)
- I due corpi si frammentano in altri corpi (**urto anelastico generico**)

Attenzione: spesso i testi omettono di considerare i gradi di libertà rotazionali o intorno al centro di massa nella definizione degli urti elastici. Questo è un errore concettuale grave, che porta confusione!

Un urto si dice elastico se si conserva esattamente l'energia cinetica nel sistema del centro di massa. Questo è vero se e solo se i corpi dopo l'urto elastico sono nello stesso numero ed esattamente inalterati.
(in linea puramente teorica si potrebbe immaginare un insieme di corpi diverso che conservi esattamente l'energia cinetica, ma in pratica è impossibile)

Urti elastici

Limitando per il momento l'attenzione ai soli punti materiali, possiamo scrivere:

$$K'_i = K'_f \Rightarrow \frac{p'_{1i}{}^2}{2m_1} + \frac{p'_{2i}{}^2}{2m_2} = \frac{p'_{1f}{}^2}{2m_1} + \frac{p'_{2f}{}^2}{2m_2}$$

In linea di principio, sarebbe possibile rispettare l'uguaglianza anche con masse finali diverse da quelle iniziali, ma in pratica questo è così improbabile che di fatto le due definizioni di urto elastico sono equivalenti.

Poiché $\vec{p}'_{1i} = -\vec{p}'_{2i}$ e $\vec{p}'_{1f} = -\vec{p}'_{2f}$, possiamo riscrivere le energie cinetiche:

$$K'_i = K'_f \Rightarrow \frac{p'_{1i}{}^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{p'_{1f}{}^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \Rightarrow \|\vec{p}'_{1i}\| = \|\vec{p}'_{1f}\|$$

Urti elastici

In un urto elastico le quantità di moto finali possono cambiare solo in direzione e verso rispetto a quelle iniziali, ma mantengono lo stesso modulo

La direzione in cui emergono i punti materiali nello stato finale dipende dalla particolare forma delle forze in gioco.

L'uguaglianza dei moduli tra le quantità di moto iniziali e finali di due punti materiali che si urtino elasticamente discende dai tre Principi della Dinamica

Osserviamo inoltre che, se le quantità di moto finali non sono sulla stessa retta di quelle iniziali, le quantità di moto iniziali e finali definiscono un piano. Un urto elastico tra due punti materiali può sempre essere studiato su un solo piano.

Urti elastici

Cinematica dell'urto elastico tra due punti materiali

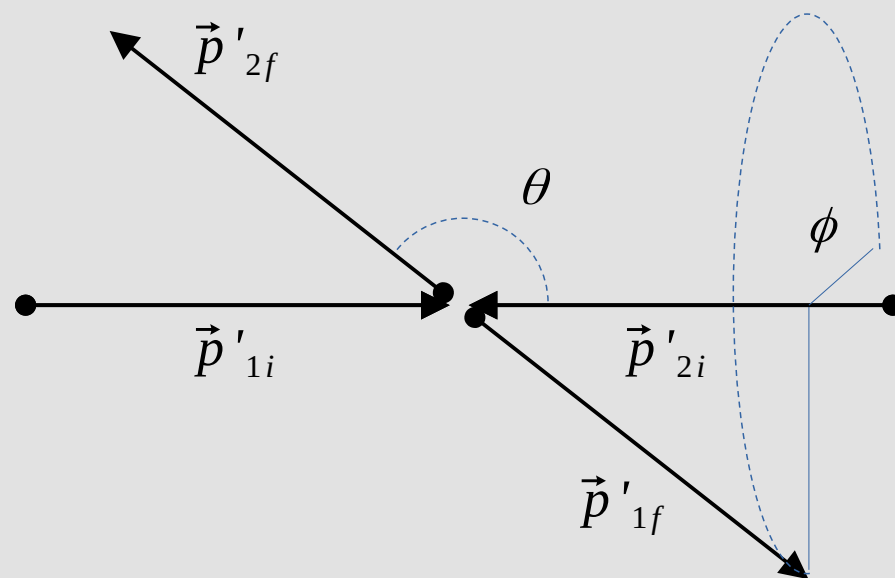
I parametri liberi per lo stato finale sono 3, ossia le tre componenti della quantità di moto finale.

Tuttavia la conservazione dell'energia cinetica (condizione di elasticità dell'urto) aggiunge una equazione. I parametri liberi rimanenti sono 2, ossia i due angoli θ e ϕ :

ϕ definisce il piano dell'urto.

θ definisce l'angolo di deflessione.

Se non è possibile ricavarli dalla conoscenza delle forze d'urto, questi due parametri devono essere misurati (ossia dati dalla traccia del problema) per completare la descrizione dello stato finale.

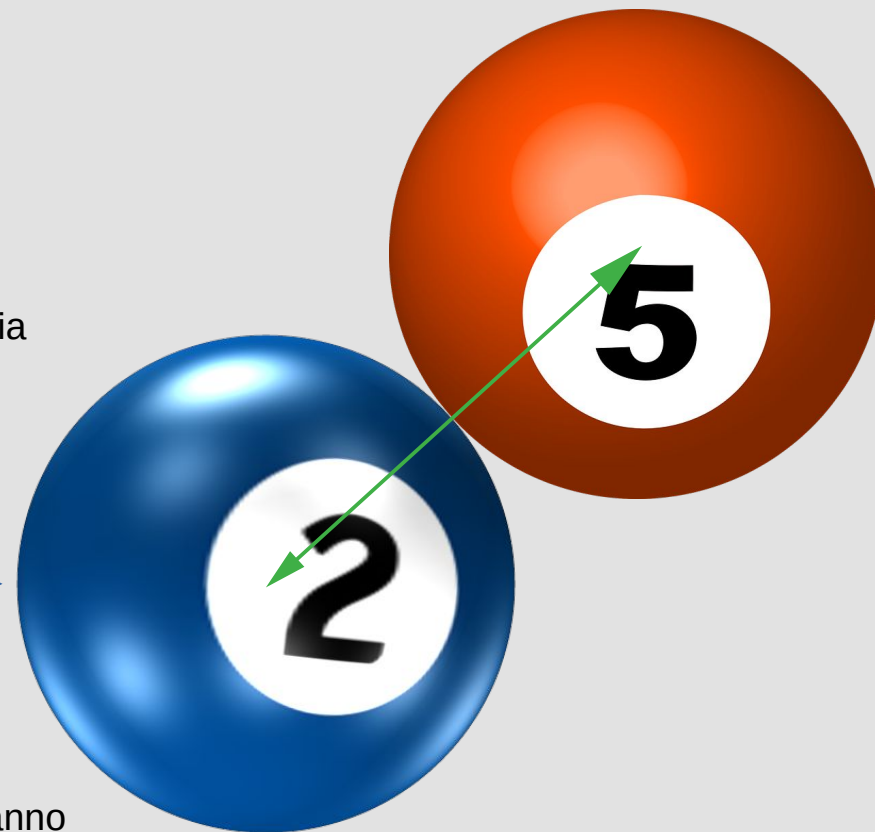


Urti elastici

Esempio: urto da palle da biliardo

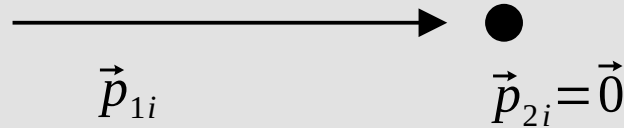
La palla 2 urta la palla 5, inizialmente ferma rispetto al tavolo, con un urto elastico secondo la traiettoria indicata dalla freccia blu e con velocità nota.

Sappiamo che la forza è la reazione vincolare che impedisce la compenetrazione, che è diretta ortogonalmente rispetto alla superficie, e quindi secondo la congiungente dei centri. L'angolo di uscita della palla 5 è quindi noto, e il moto avviene sul piano del tavolo. Le due reazioni vincolari (tra le palle e con il tavolo) ci danno le informazioni dinamiche che bastano per chiudere la cinematica dell'urto.



Urti elastici

Esempio: urto unidimensionale tra due punti materiali, di cui uno fermo. Supponiamo che dopo l'urto entrambi i punti materiali si muovano ancora sulla stessa retta.



$$\begin{cases} p_{1ix} = p_{1fx} + p_{2fx} \\ \frac{p_{1ix}^2}{2m_1} = \frac{p_{1fx}^2}{2m_1} + \frac{p_{2fx}^2}{2m_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{2fx} = p_{1ix} - p_{1fx} \\ \frac{p_{1ix}^2}{2m_1} = \frac{p_{1fx}^2}{2m_1} + \frac{(p_{1ix} - p_{1fx})^2}{2m_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{2fx} = p_{1ix} - p_{1fx} \\ p_{1fx}^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) - \frac{2p_{1ix}p_{1fx}}{m_2} + p_{1ix}^2 \left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1} \right) = 0 \end{cases}$$

$$p_{1fx} = p_{1ix} \frac{\frac{1}{m_2} \pm \sqrt{\frac{1}{m_2^2} - \left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1} \right) \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = p_{1ix} \frac{\frac{1}{m_2} \pm \sqrt{\frac{1}{m_2^2} - \frac{1}{m_2^2} + \frac{1}{m_1^2}}}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = p_{1ix} \frac{\frac{1}{m_2} \pm \frac{1}{m_1}}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}$$

Urti elastici

La soluzione con il segno positivo seleziona lo stato iniziale; quindi consideriamo direttamente l'altro caso.

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{1fx} = p_{1ix} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \\ p_{2fx} = p_{1ix} - p_{1ix} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_{1fx} = p_{1ix} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \\ p_{2fx} = p_{1ix} \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \end{array} \right.$$

Se le masse sono uguali, i due punti materiali semplicemente si scambiano le quantità di moto:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{1fx} = 0 \\ p_{2fx} = p_{1ix} \end{array} \right.$$

Urti elastici

Applicazione: moderazione di neutroni

Ci chiediamo se sia più efficiente un assorbitore di ^{208}Pb o di acqua (H_2O) per moderare (rallentare) neutroni

$$m_{\text{Pb}} \simeq 208 m_n$$

$$m_{\text{H}} \simeq m_n$$

$$m_{\text{O}} \simeq 16 m_n$$

usiamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{1fx} = p_{1ix} \frac{m_n - m_X}{m_n + m_X} \\ p_{2fx} = p_{1ix} \frac{2m_X}{m_n + m_X} \end{array} \right. \quad \text{con } m_X = m_{\text{Pb}}, m_{\text{H}}, m_{\text{O}}$$

Sorpresa: grazie ai due atomi di idrogeno, l'acqua è un **eccellente** moderatore, al contrario del massiccio piombo!

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{\text{Pb}} \rightarrow p_{1fx} = -p_{1ix} \frac{207}{209} \simeq -0.99 p_{1ix} \\ m_{\text{H}} \rightarrow p_{1fx} = 0 \\ m_{\text{O}} \rightarrow p_{1fx} = -p_{1ix} \frac{15}{17} \simeq -0.88 p_{1ix} \end{array} \right.$$

Urti elastici

Applicazione: moderazione di neutroni

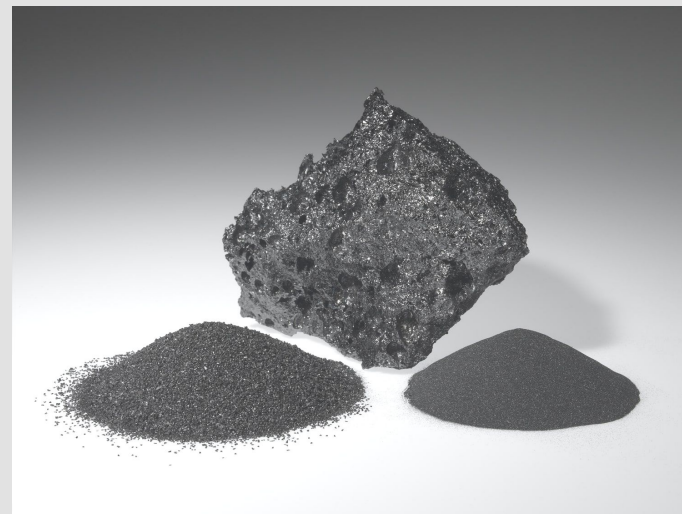
Un moderatore per barre di controllo di reattori: B_4C (carburo di boro)

$$m_B \simeq 11 m_n$$

$$m_C \simeq 12 m_n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_B \rightarrow p_{1fx} = -p_{1ix} \frac{10}{12} \simeq -0.83 p_{1ix} \\ m_C \rightarrow p_{1fx} = -p_{1ix} \frac{11}{13} \simeq -0.85 p_{1ix} \end{array} \right.$$

Se la quantità di moto cala del 17%, l'energia cala del 30%.
Quindi con pochi urti possiamo rallentare i neutroni.



Urti elastici

Se $m_2 \gg m_1$, otteniamo un caso molto interessante

$$\begin{cases} p_{1fx} = -p_{1ix} \\ p_{2fx} = 2p_{1ix} \end{cases}$$

Per esempio, se il corpo 2 è in realtà una parete di “massa infinita”, si ha:

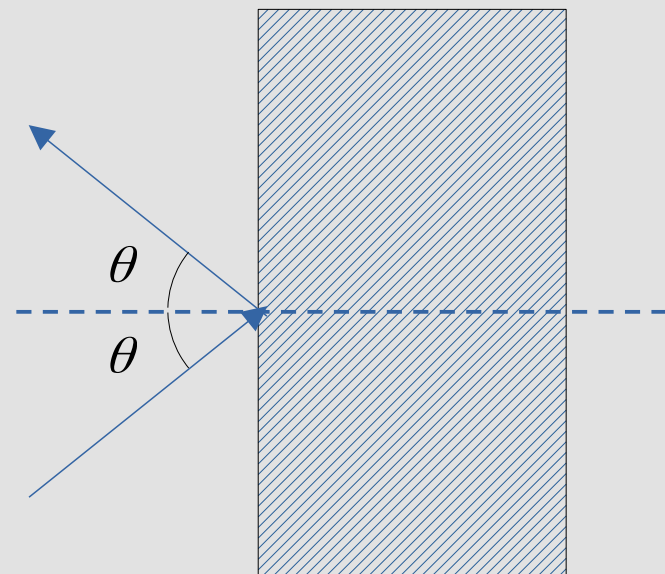
$$\begin{cases} v_{1fx} = -v_{1ix} \\ v_{2fx} = 2 \frac{p_{1ix}}{m_2} = 0 \end{cases}$$

Urti elastici

Se aggiungiamo una componente di velocità lungo l'asse y e il piano è liscio, la reazione vincolare rimane comunque inalterata e abbiamo

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{1fx} = -v_{1ix}; \quad v_{1fy} = v_{1iy} \\ v_{2fx} = 2 \frac{p_{1ix}}{m_2} = 0 \end{array} \right.$$

Quindi un punto materiale che urta contro una parete di massa infinita viene riflesso sullo stesso piano e con angolo di riflessione rispetto alla normale alla superficie uguale all'angolo di incidenza.



Urti elastici

Esempio: un caso in cui in un urto elastico non possiamo limitarci ai punti materiali

Problema: *Un punto materiale di massa m è lanciato con velocità v e angolo 45° contro un'asta liscia incernierata ad un estremo, di lunghezza L e di momento d'inerzia I_a rispetto all'asse della cerniera, ed inizialmente ferma.*

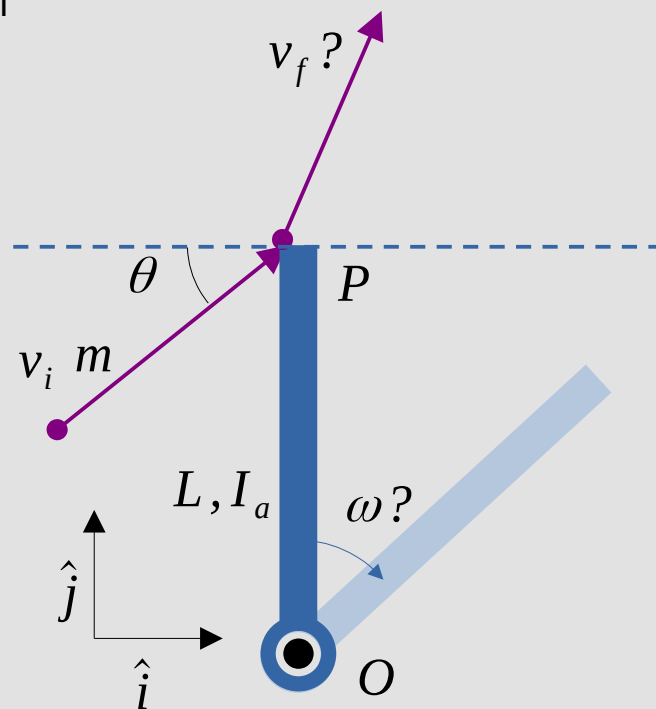
Si vuol sapere con quale angolo il punto materiale prosegue la sua corsa e qual è la velocità angolare dell'asta dopo l'urto elastico.

Chiaramente, in questo caso non possiamo trattare il problema con le formule per i punti materiali, perché l'asta decisamente non lo è.

Poiché l'asta è liscia, le forze tra il punto e l'asta si ridurranno alla reazione vincolare alla penetrazione, ortogonale all'asta.

Conviene ragionare in termini di momento angolare.

Attenzione: qui non vale nemmeno la conservazione della quantità di moto, perché c'è una forza esterna impulsiva: quale?



Urti elastici

Useremo la II Equazione Cardinale della Dinamica e la conservazione dell'energia

$$\vec{J}_{O_i} = \vec{J}_{O_f}; K_i = K_f$$

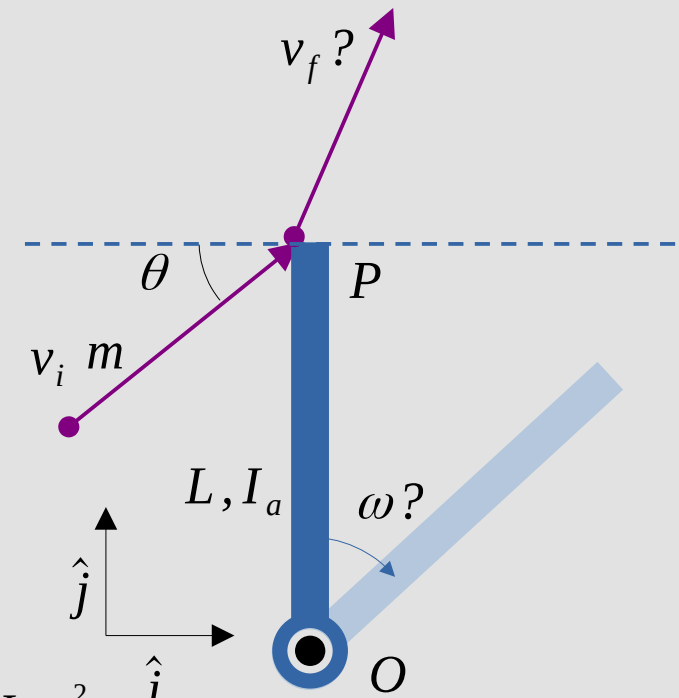
$$\text{II Eq. Card. Din: } \vec{J}_{O_i} = m \vec{r}_{OP} \times \vec{v}_i; \quad \vec{J}_{O_f} = m \vec{r}_{OP} \times \vec{v}_f + I_a \vec{\omega}$$

$$\text{Conservazione energia: } \frac{1}{2} m (v_{ix}^2 + v_{iy}^2) = \frac{1}{2} m (v_{fx}^2 + v_{fy}^2) + \frac{1}{2} I_a \omega^2$$

$$\text{asta liscia: } v_{fy} = v_{iy}$$

$$\begin{cases} -mL v_{ix} = -mL v_{fx} + I_a \omega \\ \frac{1}{2} m (v_{ix}^2 + v_{iy}^2) = \frac{1}{2} m (v_{fx}^2 + v_{fy}^2) + \frac{1}{2} I_a \omega^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -mL v_{ix} = -mL v_{fx} + I_a \omega \\ \frac{1}{2} m (v_{ix}^2 + v_{iy}^2) = \frac{1}{2} m (v_{fx}^2 + v_{iy}^2) + \frac{1}{2} I_a \omega^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega = mL (v_{fx} - v_{ix}) / I_a \\ m (v_{ix}^2 + v_{iy}^2) = m (v_{fx}^2 + v_{iy}^2) + \frac{m^2}{2} I_a L^2 \frac{(v_{fx} - v_{ix})^2}{I_a^2} \end{cases}$$



Urti elastici

Useremo la II Equazione Cardinale della Dinamica e la conservazione dell'energia

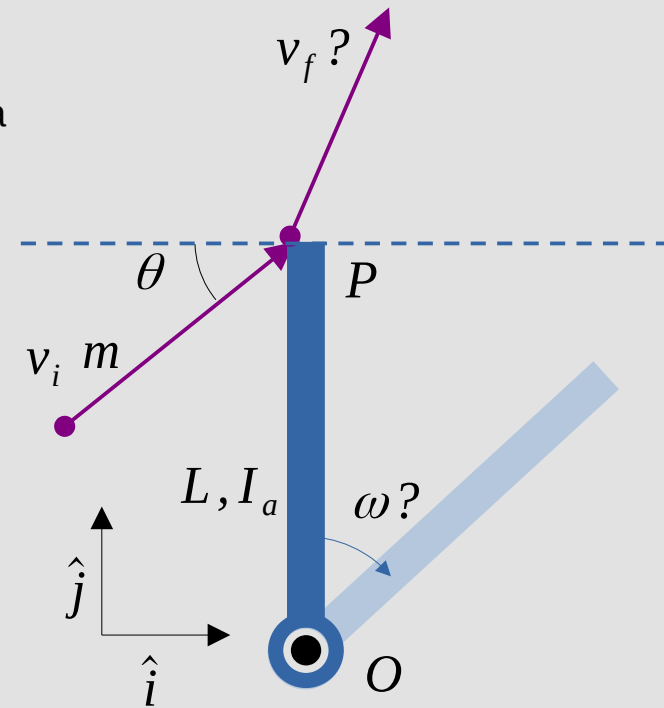
$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = mL(v_{fx} - v_{ix})/I_a \\ v_{ix}^2 = v_{fx}^2 + m \frac{L^2}{I_a} (v_{ix} - v_{fx})^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega = mL(v_{fx} - v_{ix})/I_a \\ v_{ix}^2 - v_{fx}^2 = m \frac{L^2}{I_a} (v_{ix} - v_{fx})^2 \end{array} \right.$$

$$v_{ix} + v_{fx} = m \frac{L^2}{I_a} (v_{ix} - v_{fx})$$

$$v_{fx} \left(1 + m \frac{L^2}{I_a}\right) = v_{ix} \left(m \frac{L^2}{I_a} - 1\right)$$

$$v_{fx} = v_{ix} \frac{\left(m \frac{L^2}{I_a} - 1\right)}{\left(m \frac{L^2}{I_a} + 1\right)}$$

$$\omega = -2L \frac{v_{ix}}{I_a} \frac{1}{1 + m \frac{L^2}{I_a}} = \frac{-2L v_{ix}}{I_a + m L^2}$$



Urti anelastici

Limitando per il momento l'attenzione ai soli punti materiali, si considera di solito l'urto completamente anelastico se l'energia cinetica finale nel centro di massa si annulla.

$$0 = K'_f \Rightarrow 0 = \frac{p'^2_{1f}}{2m_1} + \frac{p'^2_{2f}}{2m_2} \Rightarrow p'_{1f} = p'_{2f} = 0$$

I due punti materiali procedono attaccati, con velocità uguale a quella del centro di massa.

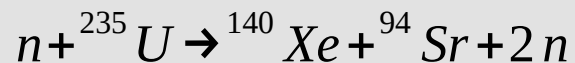
Per veri punti materiali non ha molto senso parlare di urti anelastici, perché un punto materiale non può essere modificato e l'energia non ha modo di “sparire” e convertirsi in altre forme.

Tuttavia, possiamo usare questo comodo schema per problemi altrimenti inutilmente complicati.

Urti anelastici

Un altro tipo di urto completamente anelastico: **urto con energia cinetica nel centro di massa nello stato finale superiore a quella in ingresso (urto esplosivo)**

Un neutrone che urta un nucleo di ^{235}U può produrre fissione nucleare.



$$K'_f = K'_i + Q$$

Q rappresenta il guadagno energetico dalla reazione di fissione, e viene dalla conversione dell'energia potenziale di legame dei nuclei e frammenti generati in energia cinetica

Evidentemente, il numero e tipo dei corpi nello stato finale è diverso da quelli nello stato iniziale: l'urto è anelastico!

In questo caso, non è possibile prevedere le direzioni di uscita dei corpi nello stato finale da considerazioni cinematiche

