

# DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE



La **dinamica** (del punto materiale) è lo studio delle relazioni tra le cause del moto (del punto materiale) e il moto stesso

La dinamica considera due problemi:

- 1) per un moto (del punto materiale) osservato, trovare le cause
- 2) date le cause, trovare le equazioni del moto (del punto materiale)

Tutto ciò si può generalizzare ai sistemi di punti materiali, come faremo in seguito

**Nella meccanica classica, nella *descrizione Newtoniana*, le cause della variazione del moto sono le forze**

*Attenzione: in molti testi, le forze sono legate anche alle deformazioni. Questo è scorretto, perché i punti materiali non possono deformarsi, mentre i punti materiali che appartengono ad un sistema possono mettersi in moto e quindi il sistema si deforma.*

*La definizione data qui sopra in grassetto è quella corretta.*

## Le Forze

Le forze si dividono in:

- *Forze reali*: sono riconducibili all'interazione del punto materiale con oggetti reali dalle proprietà misurabili e dipendono da una o più di queste quantità misurabili. Possono essere ridotte o eliminate allontanando gli oggetti che interagiscono con il punto materiale.
- *Forze apparenti*: non ricadono nel caso precedente e si manifestano solo in alcuni sistemi di riferimento.

Le forze reali si dividono in:

- *Forze attive*: agiscono sul punto materiale in virtù della sua posizione e/o velocità
- *Forze passive*: si oppongono al moto del punto materiale
  - *Reazioni vincolari*: realizzano vincoli cinematici (vedremo più avanti di che si tratta)
  - *Resistenze passive*: si oppongono al moto attuale o incipiente (*che sta per cominciare*) del punto materiale rispetto ad altri enti e non realizzano vincoli cinematici
    - A rigore una forza che si opponga al moto incipiente non è strettamente dissipativa, ma in realtà è fisicamente originata dagli stessi meccanismi che la rendono dissipativa quando il moto è avviato
    - Quelle che si oppongono al moto attuale si chiamano anche *forze dissipative*

Le forze attive e le resistenze passive hanno ognuna una propria **legge di forza** o **relazione costitutiva**

Il Primo principio della dinamica e i sistemi di riferimento inerziali

**Dato un punto materiale su cui non agiscano forze reali, è sempre possibile trovare un sistema di riferimento, detto sistema di riferimento inerziale, nel quale il punto permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.**

Questo principio viene spesso sintetizzato come:

*Un punto materiale su cui non agiscano forze permane nel suo stato di quiete o moto rettilineo uniforme*

Tuttavia, in questa formulazione si ignora la necessità di scegliere un sistema di riferimento inerziale.

Il primo principio della dinamica, o principio di inerzia, vale solo nei sistemi di riferimento inerziali

Detto diversamente:

***I sistemi di riferimento inerziali sono quelli in cui vale il principio di inerzia***

Se conosco un sistema di riferimento inerziale, un qualsiasi altro sistema di riferimento che si muove rispetto al primo di moto rettilineo uniforme è anch'esso inerziale.

*Spesso si legge che i sistemi di riferimento inerziali sono quelli che si muovono gli uni rispetto agli altri di moto rettilineo uniforme. Questo è sbagliato. Se ho due sistemi inerziali, è vero che si muovono di moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro, ma anche due sistemi accelerati possono avere un moto reciproco che sia rettilineo uniforme. La definizione corretta è quella in grassetto sopra.*

Il Secondo principio della dinamica e la definizione quantitativa di forza

**L'accelerazione di un punto materiale è proporzionale alla risultante (somma) di tutte le forze che agiscono sul punto materiale, secondo una costante di proporzionalità che è una caratteristica invariabile del punto materiale, detta massa inerziale (o semplicemente massa).**

La massa inerziale si misura in kg nel SI (Sistema Internazionale)

Il modulo delle forze si misura in N (Newton) nel SI

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg m /s}^2$$

$$[F]=[M][L][T^{-2}]$$

*Spesso si usa il kgp (chilogrammo-peso), ma è un'unità non ufficiale e molto scomoda perché obbliga a continue conversioni*

$$1 \text{ kgp} = 9,81 \text{ N}$$

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

oppure

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = m \vec{a}$$

## Il Secondo principio della dinamica e la definizione quantitativa di forza

Le implicazioni del Secondo principio sono profonde:

- Le forze hanno carattere **vettoriale** (ossia modulo, direzione e verso).
- L'accelerazione deve sempre esistere, quindi sono esclusi i moti che hanno discontinuità nella posizione e/o nella velocità. Questo scarta tutti i moti non fisici.
- Il Secondo principio è anche un programma di lavoro: qualsiasi descrizione delle azioni sui punti materiali (e tra punti materiali) deve obbligatoriamente essere effettuata soltanto ricorrendo ad opportune leggi di forza.

*Questa non è l'unica scelta possibile. Per esigenze particolari, si può formulare la meccanica anche con altri strumenti matematici, ma noi useremo la descrizione Newtoniana, ossia mediante le forze. In effetti, è la più intuitiva. Si dimostra che tutte le altre descrivono gli stessi fenomeni, quindi sono equivalenti.*

- Le forze sono un modello di descrizione della realtà. Le varie leggi di forza che vedremo possono nascere da osservazioni sperimentali o da trattazione matematica (è il caso delle forze apparenti). Tuttavia, tutte le forze hanno effetti tangibili sull'accelerazione del punto materiale.
- La massa è invariabile, ed è sempre la stessa per uno stesso punto materiale quali che siano le sue vicissitudini. La massa è **la quantità di materia di un corpo**. Questo si ricava dall'osservazione che la costante di proporzionalità nel Secondo principio raddoppia se due punti materiali con la stessa massa si attaccano.

Il Secondo principio della dinamica e la quantità di moto

Si può introdurre una nuova grandezza: la **quantità di moto** del punto materiale, così definita:

La quantità di moto si misura in kg m/s

$$[p]=[M][L][T^{-1}]$$

*La quantità di moto è molto utile nella trattazione degli urti e dei sistemi isolati*

*In molte branche della fisica avanzata, la quantità di moto sostituisce completamente la velocità nella trattazione*

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a}$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

## Il Secondo principio della dinamica e le forze

Il Secondo principio condensa in sé tutte le osservazioni sperimentali di svariati secoli.

La scienza, e in particolare la Fisica, consiste nell'organizzare il complesso delle conoscenze e ridurre il numero dei parametri necessari per descrivere tutte le esperienze. Il Secondo principio riduce tutte le osservazioni sperimentali accumulate sulle azioni su un punto materiale ad **un solo parametro**, ossia la **massa**.

Un caso particolare della dinamica è la **statica**, ossia lo studio delle condizioni dei corpi in equilibrio.

Il caso statico considera

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{0}$$

È più interessante per i sistemi di punti materiali che per i punti singoli.

La progettazione di palazzi, ponti, dighe, ecc., è l'applicazione più comune della statica.



## Il Secondo principio della dinamica e la definizione operativa di forza

### Definizione operativa di forza

C'è un altro caso particolare della statica: se conosciamo una forza e la mettiamo in equilibrio con un'altra, possiamo usare l'equazione della statica per misurare la forza ignota.

$$\vec{F}_{nota} + \vec{F}_{ignota} = \vec{0}$$
$$\vec{F}_{ignota} = -\vec{F}_{nota}$$

Questo ci porta alla definizione operativa di forza: la forza è quella grandezza che si misura con un dinamometro.

**Un dinamometro connesso ad un corpo fermo ed in equilibrio misura la risultante di tutte le forze che agiscono sul corpo.**

Un semplice dinamometro è costituito da una molla elicoidale in acciaio armonico e una scala graduata. La deformazione della molla è proporzionale alla risultante delle forze agenti sul corpo.



Il Terzo principio della dinamica

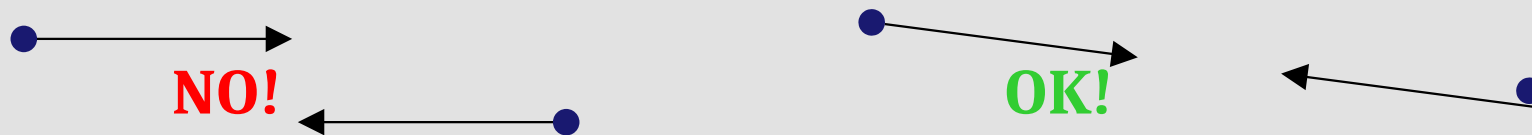
Il Terzo ed ultimo principio è anche detto “principio di azione e reazione”

**Le interazioni tra due punti materiali costituiscono una coppia di forze braccio nullo**

Oppure

**Le forze che due punti materiali esercitano l'uno sull'altro sono dirette lungo la congiungente dei due punti, hanno lo stesso modulo e verso opposto**

*Spesso si legge che “ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria”. Questa formulazione è incompleta perché non specifica la direzione delle forze, e quindi è da considerarsi scorretta.*



## Le forze apparenti

Partiamo dalle trasformazioni dell'accelerazione già viste:

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{OO'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{OO'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2 \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\vec{F} = m \vec{a}' + m \vec{a}_{OO'} + m \vec{\alpha} \times \vec{r}_{OO'} + m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2 m \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\vec{F} - m \vec{a}_{OO'} - m \vec{\alpha} \times \vec{r}_{OO'} - m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2 m \vec{\omega} \times \vec{v}' = m \vec{a}'$$

$$\vec{F} + \vec{F}_{inerzia} + \vec{F}_{centrifuga} + \vec{F}_{Coriolis} = m \vec{a}'$$

In un sistema di riferimento **non inerziale** compaiono:

la forza d'inerzia  $\vec{F}_{inerzia} = -m \vec{a}_{OO'} - m \vec{\alpha} \times \vec{r}_{OO'}$ ,

la forza centrifuga  $\vec{F}_{centrifuga} = -m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = m \omega^2 \vec{r}_{\perp}$

la forza di Coriolis  $\vec{F}_{Coriolis} = -2 m \vec{\omega} \times \vec{v}'$

Se compare almeno una di queste forze, il sistema di riferimento è **non inerziale**. Tutte queste forze sono proporzionali alla massa del punto materiale.

**Una legge di forza attiva:**  
**La forza peso**

## Forza costante

La legge di forza è

$$\vec{F} = \text{cost} .$$

Da questo segue:

$$\vec{F} = m \vec{a} = \text{cost} .$$

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F} = \text{cost} .$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{1}{m} \vec{F} t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2m} \vec{F} t^2$$

Il moto è quindi parabolico (come il moto del proiettile); nel caso particolare in cui la velocità iniziale sia nulla o diretta come la forza, si ha il moto uniformemente accelerato.

## Forza costante

Un caso particolare è quello della **forza peso**

La forza peso è una semplificazione dell'attrazione gravitazionale, valida per piccole regioni di spazio, nelle quali si possa scrivere:

$$\vec{F} = m_g \vec{g} = \text{cost} .$$

L'accelerazione  $\mathbf{g}$  è un vettore diretto verso il basso (centro della Terra) e di modulo mediamente uguale a  $9,81 \text{ m/s}^2$ .

La costante  $\mathbf{m}_g$  si chiama massa gravitazionale del punto materiale ed ha le stesse dimensioni fisiche della massa inerziale. Numericamente, è stato verificato che i loro valori coincidono. Questo ha condotto a riflessioni più profonde, sfociate poi nella Teoria della Relatività Generale.

Forza peso

La legge di forza è

$$\vec{F} = m \vec{g}$$

Da questo segue:

$$m \vec{g} = m \vec{a} = \text{cost.}$$

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Abbiamo già visto che il moto risultante è parabolico o rettilineo uniformemente accelerato.

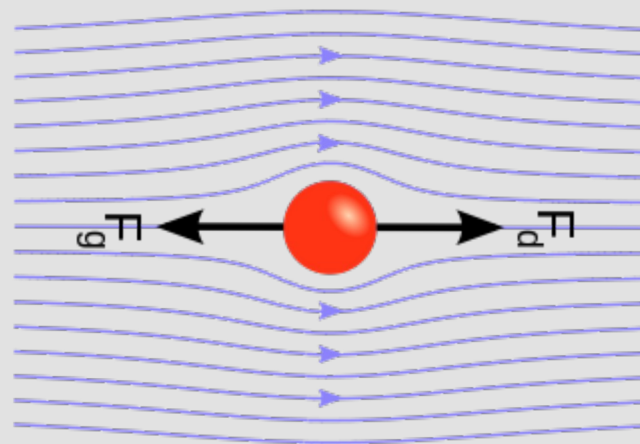
**Una legge di forza passiva:**

**La resistenza viscosa (o attrito viscoso)**

La resistenza viscosa o attrito viscoso

Un corpo che si muova in un liquido incontra una resistenza all'avanzamento.

*Attenzione: la resistenza di un liquido ha una vasta fenomenologia che dipende dalla velocità e dalle dimensioni del corpo. In questo caso consideriamo velocità molto basse e/o oggetti piccoli, riservandoci di rendere più quantitativi questi requisiti.*



La resistenza dipende anche dalla forma del corpo. Nel caso di corpi sferici, è nota una soluzione:

**Legge di Stokes:**

La viscosità si misura in Pa s

$$\vec{F} = -6 \pi r \eta \vec{v} \text{ per una sfera di raggio } r$$

$\eta$  è la viscosità del fluido

$$\vec{F} = -b \vec{v} \text{ per un corpo di forma generica}$$

in generale,  $b$  dipende da  $\eta$ .

La resistenza viscosa o attrito viscoso

Otteniamo le equazioni del moto per una goccia di acqua in caduta a partire dal secondo principio:

$$\vec{F}_p + \vec{F}_v = m \vec{a}; \quad \vec{F}_p = m \vec{g}; \quad \vec{F}_v = -b \vec{v}$$

proiettando su  $z$

$$-b v_z - m g = m a_z = m \dot{v}_z$$

cambiamo variabile in  $u = v_z + \frac{m g}{b}$ ;  $v_z = u - \frac{m g}{b}$ ;  $\dot{v}_z = \dot{u}$

$$-b u = m \dot{u}$$

La resistenza viscosa o attrito viscoso

Otteniamo le equazioni del moto per una goccia di acqua in caduta a partire dal secondo principio:

$$-b u = m \frac{du}{dt}; \quad -\frac{b}{m} dt = \frac{du}{u}; \quad -\frac{b}{m} \int_0^T dt = \int_{U_0}^U \frac{du}{u}$$

$$\frac{-b}{m} T = [\log u]_{U_0}^U = \log \frac{U}{U_0}$$

$$\frac{U}{U_0} = e^{-\frac{b}{m} T}; \quad U = U_0 e^{-\frac{b}{m} T}; \quad v_z + \frac{m g}{b} = U_0 e^{-\frac{b}{m} T}; \quad v_z = \frac{-m g}{b} + U_0 e^{-\frac{b}{m} T}$$

La costante si fissa con la condizione iniziale, per esempio partenza da goccia ferma in z:

$$v_z(0) = \frac{-m g}{b} + U_0 = 0 \Rightarrow U_0 = \frac{m g}{b}$$

$$v_z(t) = \frac{m g}{b} (e^{-\frac{b}{m} t} - 1)$$

La resistenza viscosa o attrito viscoso

Diamo qualche numero

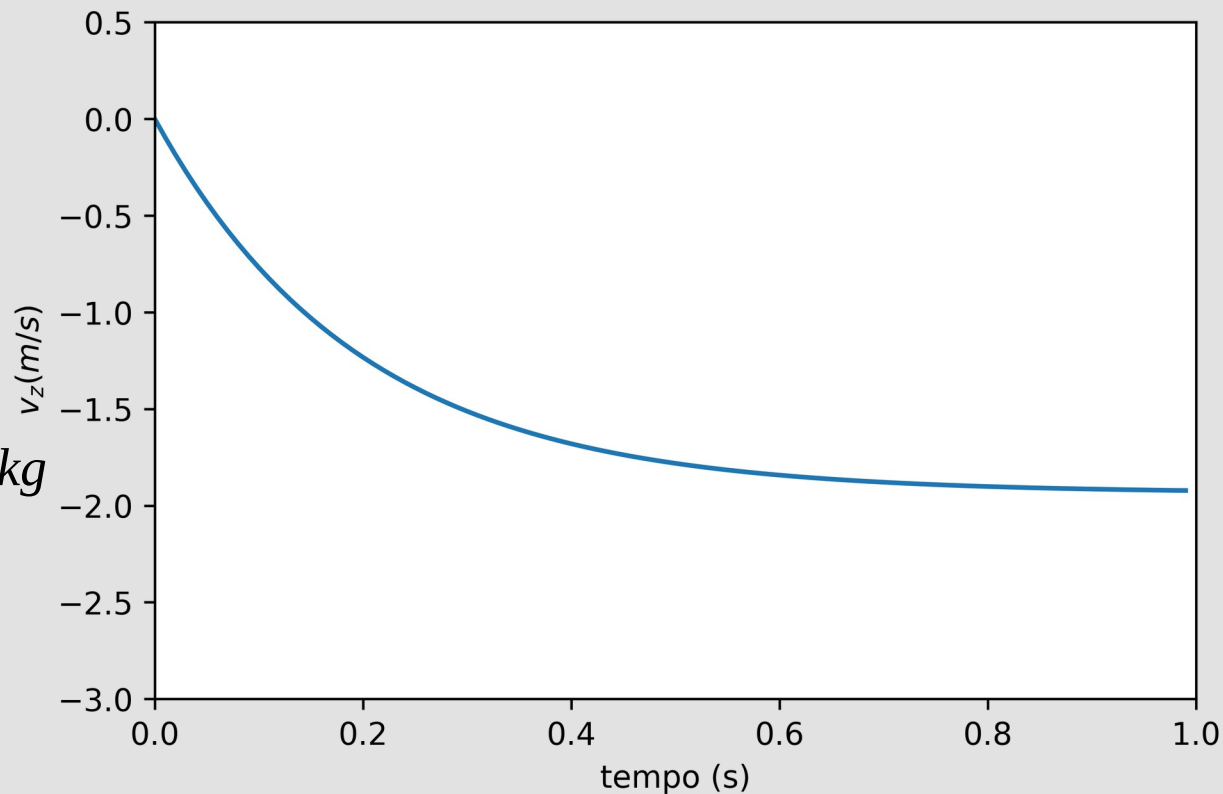
$$\eta_{aria} = 18.03 \times 10^{-6} \frac{N \cdot s}{m^2}$$

$$\rho_{acqua} = 1 \text{ g/cm}^3$$

$$r_{goccia} = 4 \text{ mm}$$

$$m_{goccia} = \rho_{acqua} \frac{4}{3} \pi r^3 = 2.7 \times 10^{-7} \text{ kg}$$

$$v_{asintotica} = \frac{-mg}{b} = -1.93 \text{ m/s}$$



## Vincoli e reazioni vincolari

## Vincoli e reazioni vincolari

Un vincolo (cinematico) è una condizione imposta sul moto di un punto materiale (o di più punti materiali)

I vincoli possono essere di due tipi:

- Vincoli bilaterali: sono espressi nella forma di uguaglianza a zero di un'opportuna funzione delle coordinate del punto materiale.

$$\Phi(\vec{r}) = 0$$

*Esempio: appartenenza della posizione di un punto materiale ad un piano:*

$$\vec{k} \cdot \vec{r} + d = 0$$

- Vincoli unilaterali: sono espressi nella forma di disuguaglianza di un'opportuna funzione delle coordinate del punto materiale

*Esempio: possibilità di muoversi solo in un semispazio*  $\Phi(\vec{r}) \geq 0$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} + d \geq 0$$

## Vincoli e reazioni vincolari

Esistono vincoli più complessi di questi, ma noi non li considereremo.

In particolare, per semplicità tratteremo solo il caso di vincoli indipendenti dal tempo

*Per esempio, se un punto materiale è vincolato a rimanere su un piano, supporremo che il piano sia fisso; chiaramente questo dipende dalla scelta del sistema di riferimento!*

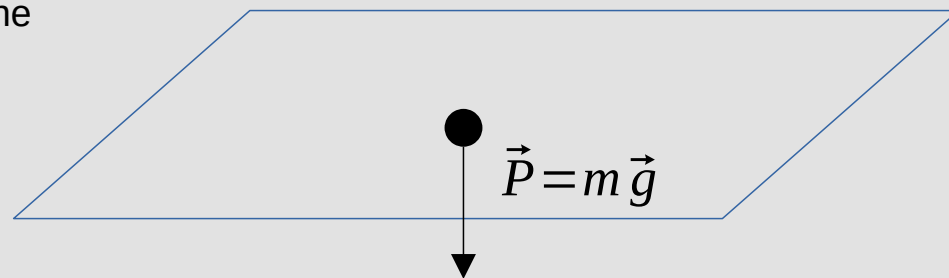
Per noi continua a valere

$$\sum_i \vec{F}_i = m \vec{a}$$

Immaginiamo di avere un punto materiale appoggiato su un tavolo sotto l'azione della forza peso

Se questa fosse l'unica forza, produrrebbe un'accelerazione che violerebbe la condizione di vincolo

$$\vec{k} \cdot \vec{r} + d \geq 0$$



## Vincoli e reazioni vincolari

Per seguire il programma di lavoro stabilito dal II principio della dinamica dobbiamo ammettere che, se il punto materiale non sfonda il piano, dev'esserci una forza che glielo impedisce

La presenza di un vincolo cinematico comporta la comparsa di una forza, detta **reazione vincolare**, tale da realizzare in ogni momento la condizione del vincolo.

Per vincoli unilaterali la reazione vincolare compare soltanto nei casi in cui vale l'equazione, ossia quando si sta per violare la disequazione.

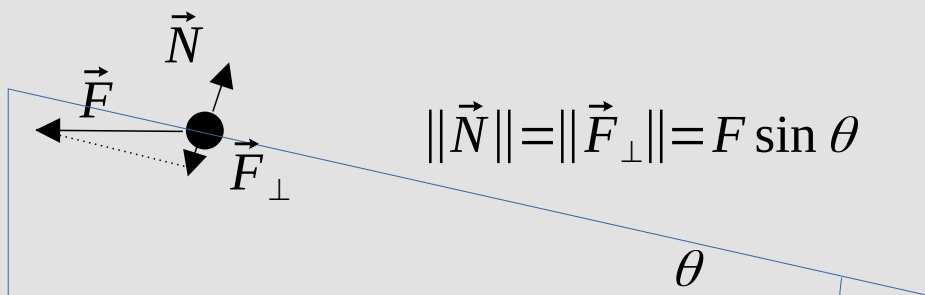
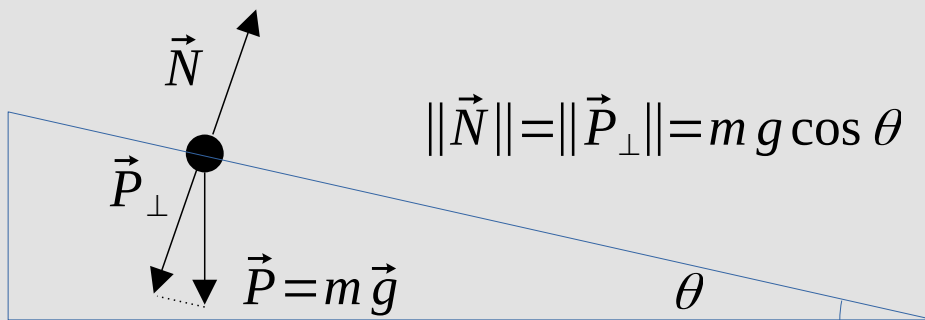
*Se ho la condizione che un punto materiale stia solo in un semispazio, non c'è reazione vincolare fino a quando il punto materiale non tocca il piano che definisce il semispazio (per esempio, finché non tocca il tavolo che non può essere sfondato).*

La reazione vincolare non può mai comportare accelerazioni lungo la superficie permessa. Una reazione vincolare è sempre ortogonale alla superficie, nel punto occupato dal punto materiale.

## Vincoli e reazioni vincolari

## Esempi di reazione vincolare di un piano inclinato

È un errore molto comune legare la reazione vincolare solo alla forza peso. Le reazioni vincolari non sono forze attive e semplicemente **reagiscono** alla sollecitazione, qualunque essa sia.



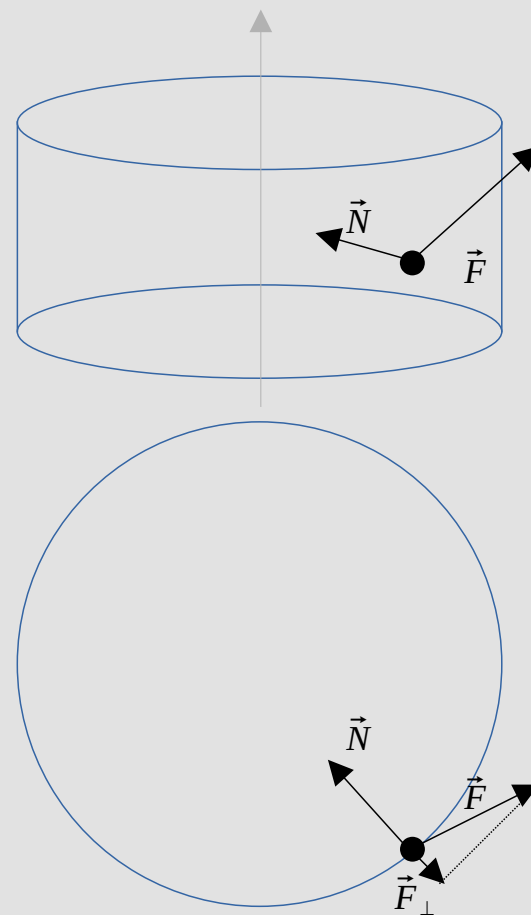
## Vincoli e reazioni vincolari

## Esempio di reazione vincolare di una guida cilindrica

In questo caso la reazione vincolare è diretta verso il centro; essa non deve soltanto bilanciare la componente ortogonale al cilindro della forza  $F$ , ma anche fornire l'accelerazione centripeta necessaria perché il punto rimanga sul cilindro.

$$\|\vec{N}\| = \|\vec{F}_\perp\| + m \omega^2 R$$

*Nota bene: i segni possono variare in altre circostanze, ad esempio se cambia la direzione della forza  $F$ . Questo è solo un esempio!*



## Vincoli e reazioni vincolari

Un altro vincolo notevole: la fune inestensibile e priva di massa

Essa vincola la posizione del punto materiale a quella di un altro punto, che può essere materiale o geometrico

$$d\vec{r}_1 \cdot \hat{f}_1 = -d\vec{r}_2 \cdot \hat{f}_2$$

L'inestensibilità è in quest'uguaglianza tra le componenti degli spostamenti lungo i capi della fune. I versori  $f$  indicano le direzioni traenti dei capi delle fune.

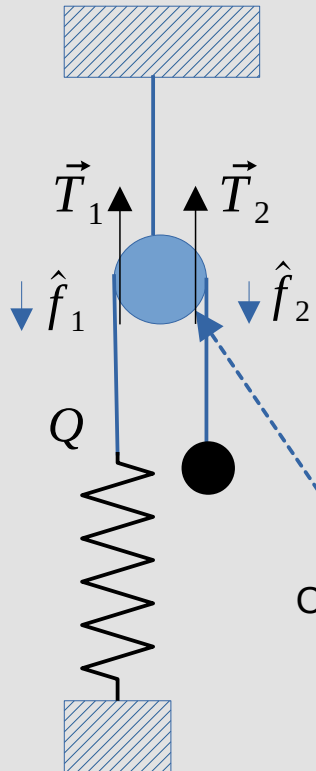
L'assenza di massa fa sì che nei calcoli non si tenga conto dell'accelerazione della fune.

La reazione vincolare della fune è una forza diretta lungo la direzione della fune a ciascun estremo, verso l'interno della fune e di modulo pari alla **tensione**, che è identica in tutta la fune.

*Per precisione, la fune inestensibile sarebbe un vincolo unilaterale, ma in pratica nei problemi compare sempre in tensione, quindi vale l'uguaglianza come in vincolo bilaterale.*

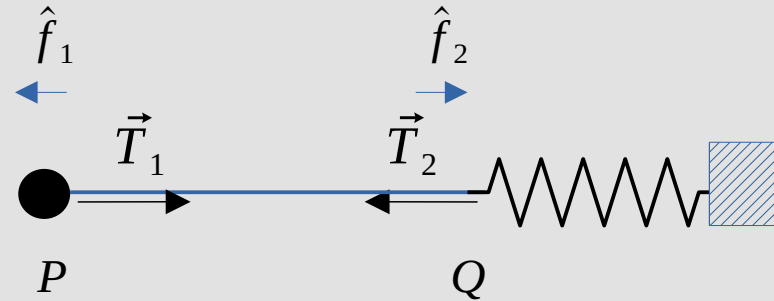
## Vincoli e reazioni vincolari

Un altro vincolo notevole: la fune inestensibile e priva di massa – è un vincolo unilaterale, ma ci interessa solo quando la fune è tesa, quindi scriviamo solo l'equazione (non la disequazione)



Carrucola semplice

$$d\vec{r}_1 \cdot \hat{f}_1 = -d\vec{r}_2 \cdot \hat{f}_2$$



Attenzione alle direzioni dei due versori della fune

**Una legge di forza attiva:  
La forza (reazione) elastica**

## Forza elastica e legge di Hooke

Si parla di *elasticità* se la forza è una funzione reversibile della deformazione, tale che:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{0} \quad \text{se} \quad \vec{r} = \vec{0}$$

Si parla di *elasticità lineare* se  $\vec{F}(\vec{r}) = 0$  se  $\vec{F} = -k \vec{r}$  ossia se la forza è una funzione lineare dello spostamento (o semplicemente è proporzionale allo spostamento)

*Attenzione al segno: se non fosse negativo, il corpo si allontanerebbe sempre di più dalla posizione di riposo, e quindi si avrebbe una catastrofe!*

## Forza elastica e legge di Hooke

Se stiamo considerando la trazione di una barra (ad es. di acciaio)

$$k = E A / L_0$$

$A$  = area della sezione trasversa

$L_0$  = lunghezza a riposo

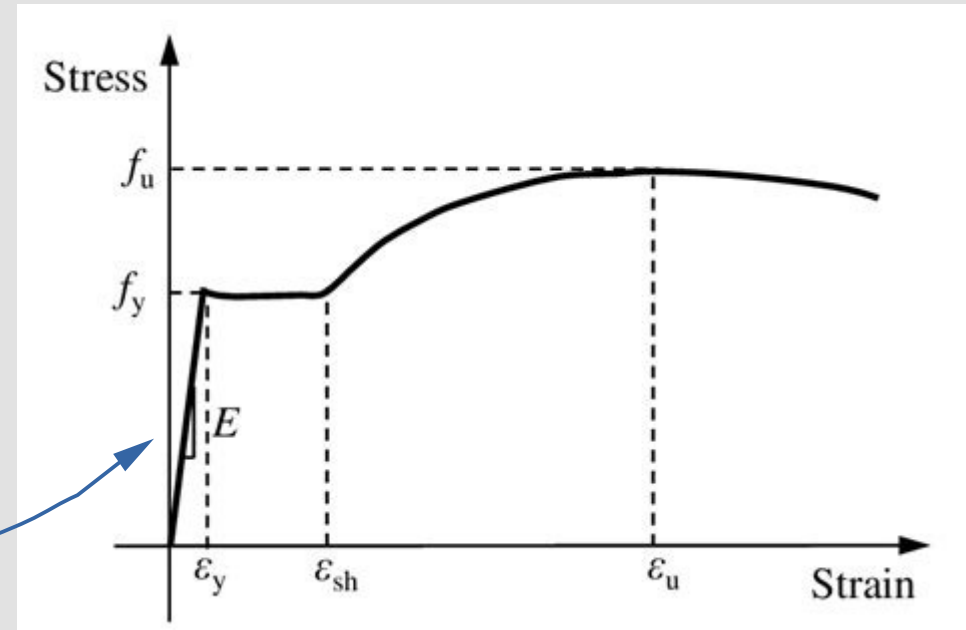
$E$  = modulo di Young

Il modulo di Young si misura in MPa o GPa  
(mega-giga Pascal =  $\text{N/m}^2$ )

Per l'acciaio ASTM-A36  $E \simeq 200 \text{ GPa}$

Quando le deformazioni non sono piccole, le cose sono molto più complicate!

Regione lineare



## Oscillatore armonico

Consideriamo un punto materiale che si muove solo sull'asse  $x$ , soggetto ad una forza di richiamo elastica

$$\vec{F} = -k \vec{r}$$

$$F_x = -k x$$

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

$$F_x = m \ddot{x}$$

$$-k x = m \ddot{x}$$

$$m \ddot{x} + k x = 0$$

Ricordiamo che abbiamo già risolto l'equazione differenziale  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Quindi basta porre

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

## Oscillatore armonico

L'equazione del moto sarà 
$$x = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$$

Ci rimangono due costanti libere,  $A$  e  $B$ . Abbiamo infiniti moti possibili. Dobbiamo ancora sfruttare le **condizioni iniziali**, ossia posizione e velocità iniziale.

Questo vale per ogni moto. Per trovare le equazioni del moto, si scrive il secondo principio della dinamica inserendo le espressioni delle forze attive e passive, e si ottengono infiniti moti possibili. Il moto che il punto materiale compirà dipende dalle condizioni iniziali, che sono **due condizioni vettoriali** (ossia 6 condizioni scalari, 3 per la posizione e 3 per la velocità iniziale). In questo caso si riducono a due perché abbiamo confinato il moto ad una retta.

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = B = x_0 \\ \dot{x}(0) = \omega_0 A = v_0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = v_0 / \omega_0 \\ B = x_0 \end{cases}$$

## Oscillatore armonico

Alternativamente possiamo scrivere  $x = A \sin(\omega_0 t + \phi)$

E quindi abbiamo ancora due costanti da fissare,  $A$  e  $\phi$ .

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = A \sin \phi = x_0 \\ \dot{x}(0) = \omega_0 A \cos \phi = v_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \phi = \arctan \frac{v_0}{\omega_0 x_0} \\ A = \sqrt{x_0^2 + (v_0 / \omega_0)^2} \end{cases}$$

Si ottiene così il moto dell'**oscillatore armonico libero** con frequenza naturale

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Oscillatore armonico

Supponiamo di aggiungere una forza costante (*precarico*)  $F - kx = m\ddot{x}$

Ridefiniamo la coordinata  $x$  intorno ad una nuova condizione di riposo

$$\xi = x - \frac{F}{k}; \quad x = \xi + \frac{F}{k}; \quad \dot{\xi} = \dot{x}; \quad \ddot{\xi} = \ddot{x}$$

Otteniamo:

$$-k\xi = m\ddot{\xi}; \quad \ddot{\xi} + \frac{k}{m}\xi = 0$$

L'equazione è la stessa, ma la posizione di riposo è spostata di  $F/k$ .

## Oscillatore armonico

Supponiamo di aggiungere una forza oscillante  $F_{osc} - kx = m\ddot{x}$ ;  $F_{osc} = F \sin(\omega t)$

Attenzione! In generale,  $\omega \neq \omega_0$

Studiamo quindi l'**oscillatore armonico forzato** con una forzante sinusoidale

$$F_{osc} = kx + m\ddot{x}; \quad \frac{F}{m} \sin(\omega t) = \ddot{x} + \frac{k}{m}x$$

$$a_f = \frac{F}{m}; \quad a_f \sin(\omega t) = \ddot{x} + \omega_0^2 x$$

Questa è un'**equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine a coefficienti costanti, non omogenea** (perché  $x = 0$  non è una soluzione accettabile)

Si dimostra che se conosciamo una soluzione  $x_p(t)$ , detta *integrale particolare*, la soluzione generale sarà della forma

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) + x_p(t)$$

## Oscillatore armonico

Le costanti A e B vanno fissate con le condizioni iniziali, ma tenendo conto anche di  $x_p(t)$ .

È molto interessante cercare un integrale particolare. Pertanto, disinteressiamoci completamente di A e B e concentriamoci su questo. Proponiamo:

$$x_p(t) = C \sin(\omega t); \quad \text{nota: } \omega \neq \omega_0$$

Sostituendo nell'equazione si ha:  $a_f \sin(\omega t) = \ddot{x}_p + \omega_0^2 x_p$

ossia:  $a_f \sin(\omega t) = -\omega^2 C \sin(\omega t) + C \omega_0^2 \sin(\omega t)$

Questo dev'essere vero per ogni tempo  $t$ , quindi possiamo considerare in particolare  $t = \pi/(2\omega)$  e avere

$$a_f = C(\omega_0^2 - \omega^2) \Rightarrow C = \frac{a_f}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

## Oscillatore armonico

Studiamo come varia la funzione  $|C/a_f|$ , che ha il significato di una risposta del sistema ad una sollecitazione.

$$\frac{C(\omega)}{a_f} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}; \quad \frac{C(\omega)}{C(0)} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

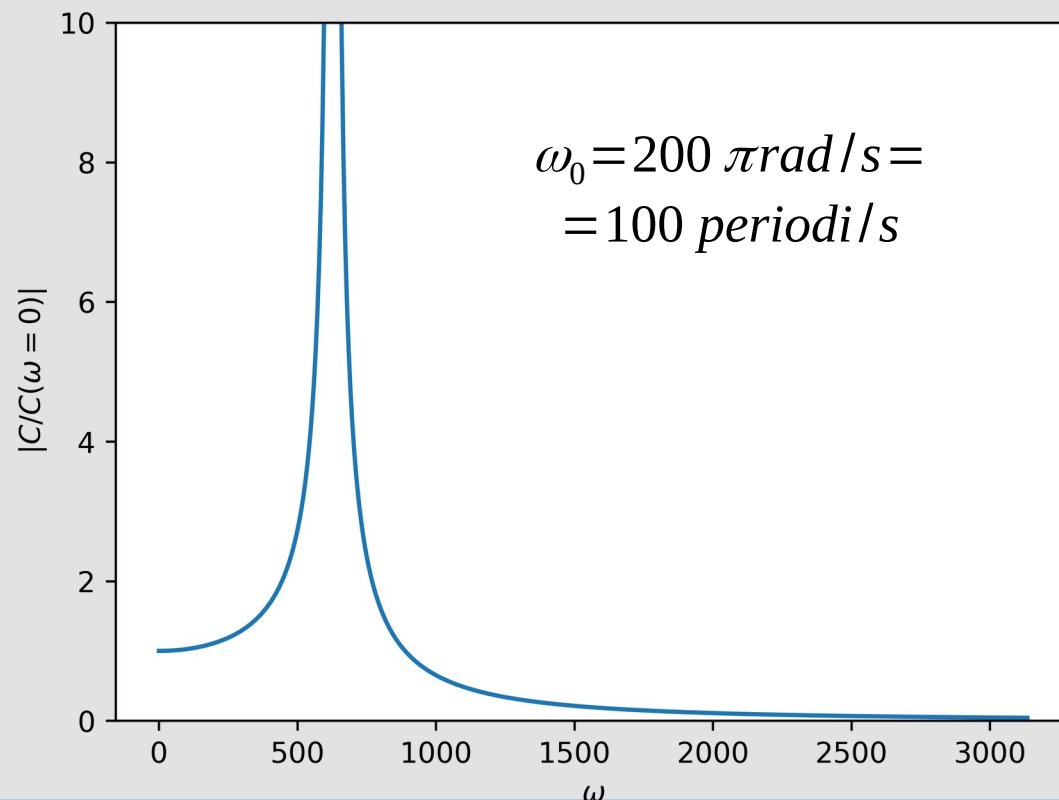
Notiamo anche che

$$\frac{C(\omega)}{C(0)} > 0 \text{ per } \omega < \omega_0$$

$$\frac{C(\omega)}{C(0)} < 0 \text{ per } \omega > \omega_0$$

Per  $\omega \rightarrow \omega_0$  la risposta diverge, e non è definita quando vale l'uguaglianza

Si parla in tal caso di **risonanza** =  
**incremento della risposta in prossimità**  
**della frequenza caratteristica**



## Oscillatore armonico

Nel caso di perfetta risonanza, l'integrale particolare assume una forma diversa

$$x_p(t) = t C \cos(\omega_0 t); \dot{x}_p(t) = C \cos(\omega_0 t) - \omega_0 C t \sin(\omega_0 t); \ddot{x}_p(t) = -2 \omega_0 C \sin(\omega_0 t) - \omega_0^2 C t \cos(\omega_0 t)$$

$$\frac{F}{m} \sin(\omega_0 t) = -2 \omega_0 C \sin(\omega_0 t) - \omega_0^2 C t \cos(\omega_0 t) + \omega_0^2 t C \cos(\omega_0 t) = -2 \omega_0 C \sin(\omega_0 t)$$

Quindi per la fase  $\phi$ :

$$\phi = 0 \text{ per } \omega < \omega_0$$

$$\phi = \frac{-\pi}{2} \text{ per } \omega = \omega_0$$

$$\phi = -\pi \text{ per } \omega > \omega_0$$

$$C = -\frac{F}{2 m \omega_0}$$

In caso di perfetta risonanza, l'ampiezza dell'oscillazione aumenta col tempo. Qualsiasi sistema finisce per rompersi.

## Lavoro ed energia

## Il lavoro

Il concetto di lavoro in meccanica classica, nella descrizione Newtoniana, è un concetto accessorio rispetto alla risoluzione dei due problemi della dinamica. Tuttavia, consente di aprire una visione diversa e di introdurre il concetto di energia. In altre branche della fisica o in altre descrizioni, l'energia diventa un concetto fondamentale, molto più di quello di forza.

Il lavoro di una forza che agisce su un punto materiale mentre esso si sposta di un vettore  $\Delta \mathbf{s}$  è:

$$L = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s}$$

*Il lavoro ha dimensioni  $[M][L^2][T^{-2}]$  e si misura in Joule (J).  $1 J = 1 N \times 1 m$ .*

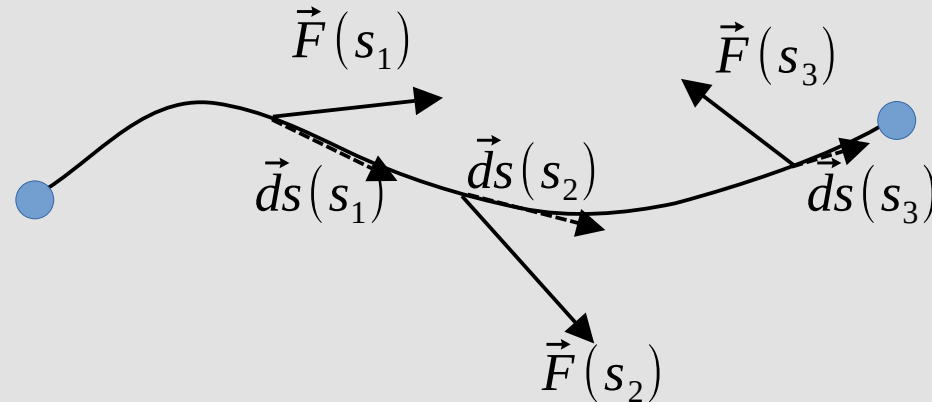
Spesso accade che durante lo spostamento la forza vari in modulo, direzione e/o verso. Se la forza è costante a tratti, si può spezzare il cammino in modo che il lavoro totale sia la somma dei lavori calcolati in ciascun tratto:

$$L = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{s}_i$$

## Il lavoro

In generale, la forza può continuamente cambiare in modulo, direzione e verso, e si può considerare costante solo per spostamenti infinitesimi. Si definisce il lavoro elementare e poi quello finito come somma infinita di lavori elementari, ossia un integrale **svolto sul cammino  $\Gamma$  che il punto materiale compie tra un punto iniziale ed uno finale.**

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s}; \quad L = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



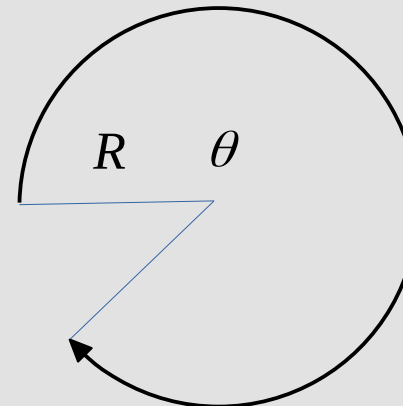
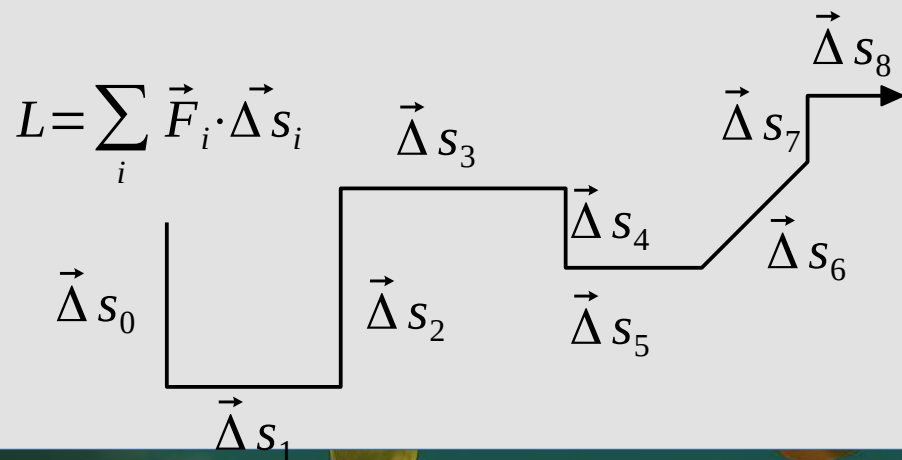
## Il lavoro

Come si fa un "integrale su un cammino"?

Abbiamo bisogno di descrivere il cammino in funzione di un parametro.

Ci sono sempre almeno un paio di opzioni di facile applicazione:

- 1) L'ascissa curvilinea
- 2) Il tempo



$$s = R\theta$$

$$\vec{r} = -R \cos \theta \hat{i} + R \sin \theta \hat{j}$$

$$d\vec{s} = (R \sin \theta \hat{i} + R \cos \theta \hat{j}) d\theta$$

$$L = \int_0^{7/8\pi} \vec{F}(\theta) \cdot (R \sin \theta \hat{i} + R \cos \theta \hat{j}) d\theta$$

## Il lavoro

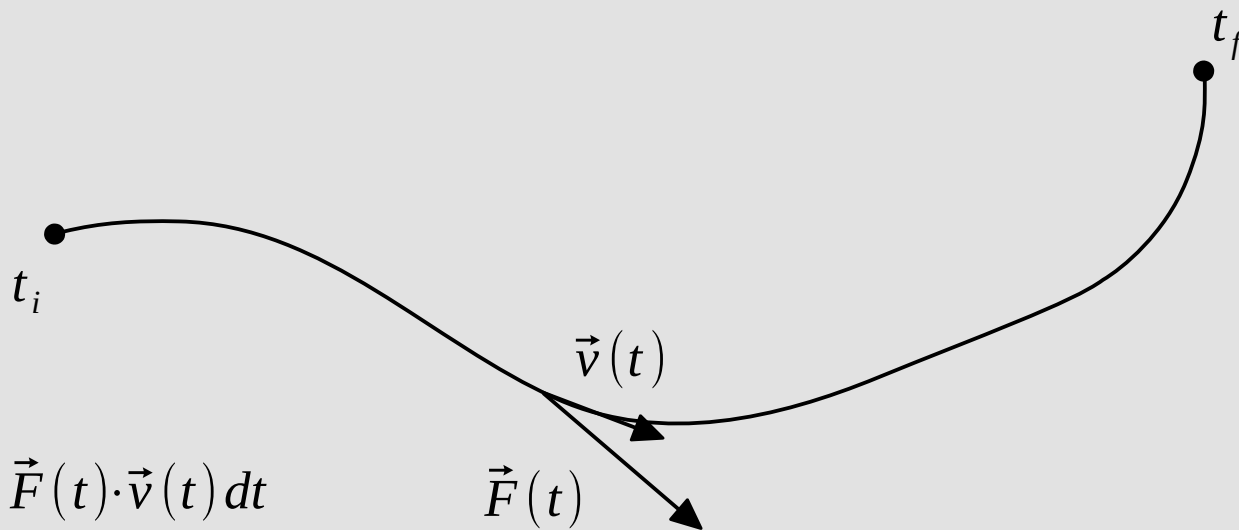
Come si fa un “integrale su un cammino”?

Abbiamo bisogno di descrivere il cammino in funzione di un parametro.

Ci sono sempre almeno un paio di opzioni di facile applicazione:

- 1) L'ascissa curvilinea
- 2) Il tempo

$$L = \int_{s_i}^{s_f} \vec{F}(s) \cdot d\vec{s} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} dt = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) dt$$

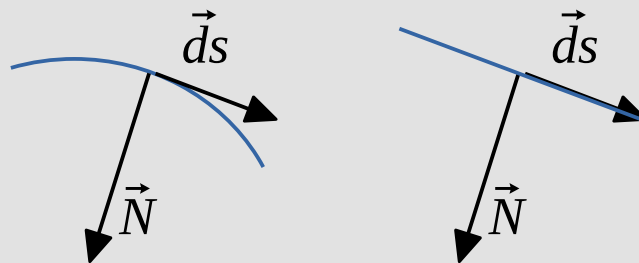


## Il lavoro delle reazioni vincolari

Consideriamo prima vincoli bilaterali

- Superfici curve o piani: la reazione è sempre ortogonale allo spostamento.

$$\vec{N} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow dL_{\text{vincolare}} = 0 \Rightarrow L_{\text{vincolare}} = 0$$



Vincoli unilaterali

- Se il punto materiale si trova nella regione in cui vale la disequazione (semispazio permesso), non c'è reazione vincolare, quindi:

$$\vec{N} = \vec{0} \Rightarrow dL_{\text{vincolare}} = 0 \Rightarrow L_{\text{vincolare}} = 0$$

- Se il punto materiale si trova sulla frontiera della regione permessa, la reazione vincolare è ortogonale alla frontiera e si ricade nel caso precedente.

## Il lavoro delle reazioni vincolari

## Vincoli unilaterali complessi

- Esempio: fune inestensibile  
Ricordiamo che la forza vincolare esercitata dalla fune a ciascun capo è:

$$d\vec{r}_1 \cdot \hat{f}_1 = -d\vec{r}_2 \cdot \hat{f}_2$$

$$\vec{N}_1 = T \hat{f}_1; \quad \vec{N}_2 = T \hat{f}_2$$

( $T$  è la tensione,  $\mathbf{f}$  sono i versori dei capi della fune)

Quindi:

$$dL_{fune} = \vec{N}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{N}_2 \cdot d\vec{r}_2 = T \hat{f}_1 \cdot d\vec{r}_1 + T \hat{f}_2 \cdot d\vec{r}_2 = T (\hat{f}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \hat{f}_2 \cdot d\vec{r}_2) = T (\hat{f}_1 \cdot d\vec{r}_1 - \hat{f}_1 \cdot d\vec{r}_1) = 0$$

$$L_{fune} = 0$$

Il lavoro dei vincoli **non dipendenti dal tempo** è sempre **nullo**.

Il lavoro delle forze passive dissipative

Per definizione, le forze passive dissipative si oppongono al moto.

Pertanto:

$$dL = \vec{F}_{diss} \cdot \vec{ds} = F_{diss} ds \cos(\theta_{diss}); \quad \cos(\theta_{diss}) \leq 0 \Rightarrow dL \leq 0$$

$$L_{diss} = \int_{\Gamma} dL_{diss} \leq 0$$

Esempio: resistenza viscosa

$$\vec{F} = -b \vec{v}; \quad dL = \vec{F} \cdot \vec{ds} = -b \vec{v} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} dt = -b \vec{v} \cdot \vec{v} dt = -b v^2 dt$$

Il lavoro e la potenza

**Il lavoro compiuto nell'unità di tempo si dice potenza**

$$\langle P \rangle = \frac{\Delta L}{\Delta t} \quad \text{potenza media}$$

$$P = \frac{dL}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad \text{potenza istantanea}$$

La potenza si misura in W (Watt).  $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$

Sono molto comuni i kW.  $1 \text{ kW} = 1000 \text{ W}$

In applicazioni di trasporto si usano anche i CV (cavalli vapore) o HP (horse power).

$1 \text{ CV} = 0,7355 \text{ kW}$

Il lavoro

*Il lavoro dipende dal sistema di riferimento?*

***Certamente sì!***

Esempio: quale che sia il lavoro di una forza  $F$  sul punto materiale, nel sistema del punto materiale lo spostamento è sempre nullo, quindi il lavoro di qualsiasi forza è zero.

Anche se il lavoro non è un invariante, esso è molto utile per una vasta classe di problemi.

Ci consente inoltre di introdurre un concetto molto importante...

Lavoro ed energia cinetica: il teorema delle “forze vive”

Consideriamo il lavoro della risultante di tutte le forze agenti su un punto materiale, su un cammino parametrizzato con il tempo:

$$L = \int_{s_i}^{s_f} \vec{F}(s) \cdot d\vec{s} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} dt = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) dt$$

Dal II principio si ha:  $\vec{F}(t) = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$

e sostituendo nell'integrale:

$$L = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) dt = \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \cdot \vec{v}(t) dt = \int_{v_i}^{v_f} m d\vec{v} \cdot \vec{v} = \int_{v_i^2}^{v_f^2} \frac{m}{2} dv^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

Lavoro ed energia cinetica: il teorema delle “forze vive”

Si può scrivere che

$$L = \Delta K = K_2 - K_1$$

$$K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m v_2^2$$

**Il lavoro della risultante di tutte le forze agenti su un punto materiale è pari alla variazione dell'energia cinetica del punto materiale; l'energia cinetica (o “forza viva”), è definita come  $\frac{1}{2} m v^2$ , e dipende quindi solo dallo stato cinetico del punto materiale.**

In molti problemi è sufficiente valutare la variazione di energia cinetica tra due istanti, oppure il lavoro di una forza si può calcolare soltanto dalla variazione di energia cinetica, evitando completamente di svolgere l'integrale lungo il cammino.

La parola energia significa “ενέργεια” ossia “εν-έργον”, “lavoro dentro” o “qualcosa che ha dentro la capacità di compiere lavoro”. L'energia si misura in Joule. A volte si usa anche il kWh = 1000 W × 3600 s = 3,6 MJ

## Lavoro di forze conservative

Una forza si dice **conservativa** se il suo lavoro lungo un *qualsunque* cammino è funzione solo del punto iniziale e del punto finale.

$$L = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = L(\vec{r}_i, \vec{r}_f)$$

In questo esempio, il lavoro lungo il cammino  $\Gamma_1$  e quello lungo  $\Gamma_2$  sono uguali; non si tratta però di un'uguaglianza incidentale: perché una forza sia conservativa, questo deve essere vero per tutti i cammini che iniziano e terminano con la stessa coppia di punti. Solo in questo caso, la forza si dice conservativa.

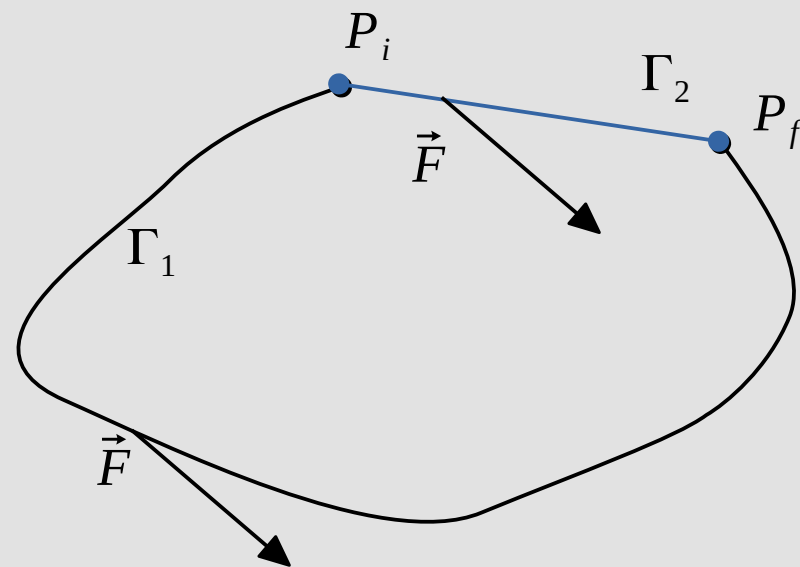
Ovviamente:

$$L(\vec{r}_i, \vec{r}_f) = -L(\vec{r}_f, \vec{r}_i)$$

perché si cambia il verso di integrazione.

Per ogni cammino chiuso, con una forza conservativa, si ha:

$$L = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$



## Lavoro di forze conservative ed energia potenziale

Se una forza è conservativa, il lavoro che essa compie dipende solo dal punto iniziale e da quello finale.

Fissiamo un punto O, e riferiamo tutti i lavori ad esso.

$$L(\vec{r}_i, \vec{r}_f) = L(\vec{r}_i, \vec{r}_O) + L(\vec{r}_O, \vec{r}_f) = L(\vec{r}_O, \vec{r}_f) - L(\vec{r}_O, \vec{r}_i) = U(\vec{r}_i) - U(\vec{r}_f)$$

**Esiste una funzione, detta energia potenziale, tale che il lavoro di una forza conservativa in un cammino tra due punti è uguale alla sua variazione tra il punto iniziale e quello finale.**

$$U(\vec{r}_i) = -L(\vec{r}_O, \vec{r}_i)$$

$$U(\vec{r}_f) = -L(\vec{r}_O, \vec{r}_f)$$

$$U(\vec{r}) = -L(\vec{r}_O, \vec{r}) \text{ per un punto qualsiasi}$$

Osserviamo che il punto O è arbitrario. In effetti, tutta la funzione U è definita *a meno di una costante arbitraria*. Possiamo impostare questa costante come ci torna più comodo, ma non si può cambiare nella trattazione di un fenomeno.

## Conservazione dell'energia meccanica

Consideriamo un punto materiale soggetto solo all'azione di forze conservative.

Dal teorema dell'energia cinetica abbiamo:  $L(\vec{r}_i, \vec{r}_f) = K_f - K_i$

Inoltre, poiché le forze sono tutte conservative, abbiamo:  $L(\vec{r}_i, \vec{r}_f) = U(\vec{r}_i) - U(\vec{r}_f)$

Segue che:

$$K_f - K_i = U(\vec{r}_i) - U(\vec{r}_f)$$

$$K_f + U(\vec{r}_f) = K_i + U(\vec{r}_i)$$

$$E_f = E_i$$

avendo definito l'energia meccanica come somma dell'energia cinetica e potenziale ad ogni istante.

$$E = K(v) + U(\vec{r})$$

**L'energia meccanica di un punto materiale soggetto solo all'azione di forze conservative rimane costante (si conserva).**

Non conservazione dell'energia meccanica

Supponiamo di avere in gioco sia forze conservative che dissipative:

Dal teorema dell'energia cinetica abbiamo:  $L(\vec{r}_i, \vec{r}_f) = K_f - K_i$

Inoltre, per le forze conservative, abbiamo:  $L_{cons}(\vec{r}_i, \vec{r}_f) = U(\vec{r}_i) - U(\vec{r}_f)$

Per le forze dissipative:  $L_{diss}(\vec{r}_i, \vec{r}_f) \leq 0$

Dal teorema delle forze vive:

$$\begin{aligned} K_f - K_i &= L_{cons}(\vec{r}_i, \vec{r}_f) + L_{diss}(\vec{r}_i, \vec{r}_f) = U(\vec{r}_i) - U(\vec{r}_f) + L_{diss}(\vec{r}_i, \vec{r}_f) \\ (K_f + U(\vec{r}_f)) - (K_i + U(\vec{r}_i)) &= L_{diss}(\vec{r}_i, \vec{r}_f) \leq 0 \\ E_f - E_i &= L_{diss} \leq 0 \end{aligned}$$

**L'energia meccanica di un punto materiale soggetto all'azione di forze dissipative non si conserva.**

## Energia potenziale e forze conservative

Supponiamo di conoscere in ogni punto dello spazio l'energia potenziale  $U$  di una certa forza conservativa  $F$ . Consideriamo il lavoro elementare per un piccolo incremento in ciascuna delle direzioni principali, considerando la forza costante per il tratto percorso:

ossia:

$$\left. \begin{aligned} \frac{U(x, y, z) - U(x + \Delta x, y, z)}{\Delta x} &\simeq F_x \\ \frac{U(x, y, z) - U(x, y + \Delta y, z)}{\Delta y} &\simeq F_y \\ \frac{U(x, y, z) - U(x, y, z + \Delta z)}{\Delta z} &\simeq F_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} F_x = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x} = - \frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = - \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{U(x, y + \Delta y, z) - U(x, y, z)}{\Delta y} = - \frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z = - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{U(x, y, z + \Delta z) - U(x, y, z)}{\Delta z} = - \frac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

$$U(\vec{r}) = U(x, y, z)$$

$$U(x, y, z) - U(x + \Delta x, y, z) \simeq F_x \Delta x$$

$$U(x, y, z) - U(x, y + \Delta y, z) \simeq F_y \Delta y$$

$$U(x, y, z) - U(x, y, z + \Delta z) \simeq F_z \Delta z$$

## Energia potenziale e forze conservative

Abbiamo ottenuto:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{F} = -\mathit{grad} U = -\vec{\nabla} U = -\left( \frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k} \right)$$

Quindi un campo di forza conservativo è pari al **gradiente** dell'energia potenziale, cambiato di segno!

Il gradiente di una funzione scalare di più variabili è il vettore che, in ogni punto, definisce la direzione di massima variazione (o massima pendenza).

Specificata la forma dell'energia potenziale, resta definita la forza esercitata sul punto materiale, e quindi il moto è completamente determinato, a patto che si precisino le condizioni iniziali (che sono comunque libere)

## Energia potenziale e forze conservative

Vediamo subito alcune energie potenziali per fissare le idee:

- Energia potenziale della forza peso:

$$U(x, y, z) = m g z + \text{cost.}$$

$$\vec{F} = -\text{grad } U = -\vec{\nabla} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k}\right) = 0 \hat{i} + 0 \hat{j} - m g \hat{k} = -m g \hat{k}$$

- Energia potenziale della forza elastica (1 dimensione)

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2} k x^2 + \text{cost.}$$

$$\vec{F} = -\text{grad } U = -\vec{\nabla} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k}\right) = -k x \hat{i} + 0 \hat{j} + 0 \hat{k} = -k x \hat{i}$$

## Energia potenziale e forze conservative

Vediamo subito alcune energie potenziali per fissare le idee:

- Energia potenziale della forza elastica (2 dimensioni)

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k y^2 + \text{cost.}$$

$$\vec{F} = -\text{grad } U = -\vec{\nabla} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k}\right) = -k x \hat{i} - k y \hat{j} + 0 \hat{k} = -k x \hat{i} - k y \hat{j}$$

- Energia potenziale della forza centrifuga (rotazione intorno all'asse z)

$$U(x, y, z) = -\frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2) + \text{cost.}$$

$$\vec{F} = -\text{grad } U = -\vec{\nabla} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k}\right) = m \omega^2 x \hat{i} + m \omega^2 y \hat{j} + 0 \hat{k} = m \omega^2 (x \hat{i} + y \hat{j}) = m \omega^2 \vec{r}_{\perp}$$

## Energia potenziale e forze conservative

Se una forza è conservativa, il suo **rotore** è nullo

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \vec{\nabla} \times \vec{F} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}} = \\ &= - \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \right) \hat{\mathbf{i}} - \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right) \hat{\mathbf{j}} - \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \right) \hat{\mathbf{k}} = \vec{0} \end{aligned}$$

poiché nelle derivate seconde incrociate non conta l'ordine di derivazione.

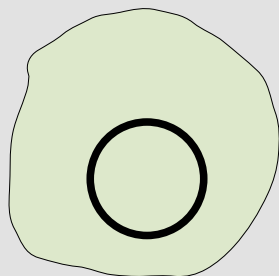
Si dice che il campo di forze è **irrotazionale**.

## Energia potenziale e forze conservative

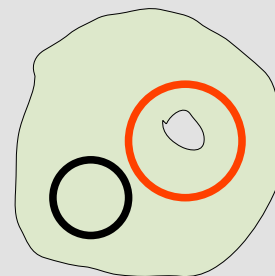
Se un campo di forze non è irrotazionale, non può essere conservativo: non esiste nessuna funzione energia potenziale da cui esso discenda.

Se un campo di forze è irrotazionale, è conservativo all'interno di una regione **semplicemente connessa** (ossia senza buchi).

Una regione si dice semplicemente connessa se qualsiasi linea chiusa può essere ridotta ad un punto senza uscire dalla regione stessa:



Semplicemente connessa



Non semplicemente connessa: la linea rossa non si può ridurre ad un punto senza uscire dalla regione

## Applicazioni dell'energia potenziale

- Caduta di un grave

$$U_i = mgh + \text{cost.}; \quad v_i = 0; \quad K_i = \frac{1}{2} m v_i^2 = 0$$

$$U_f = 0 + \text{cost.}; \quad K_f + U_f = K_i + U_i; \quad K_f = K_i + U_i - U_f = mgh; \quad \frac{1}{2} m v_f^2 = mgh$$

$$v_f = \sqrt{2gh}$$

- Forza costante lungo x (diversa dalla forza peso):

$$U = -Ax + \text{cost.}; \quad F_x = A$$

## Applicazioni dell'energia potenziale

- Oscillatore armonico libero

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2; \quad F_x = -k x$$

- Verifichiamo che l'energia meccanica totale si conserva

$x(t) = A \sin(\omega_0 t)$  (la fase è irrilevante in questo caso, corrisponde solo ad un ritardo temporale)

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

$$\dot{x}(t) = \omega_0 A \cos(\omega_0 t); \quad K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

$$U + K = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} A^2 (k \sin^2(\omega_0 t) + m \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t))$$

## Applicazioni dell'energia potenziale

- Oscillatore armonico libero  
Ricordiamo che

E quindi  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$U + K = \frac{1}{2} A^2 (k \sin^2(\omega t) + m \omega^2 \cos^2(\omega t)) = \frac{1}{2} A^2 (k \sin^2(\omega_0 t) + k \cos^2(\omega_0 t)) = \frac{1}{2} k A^2$$

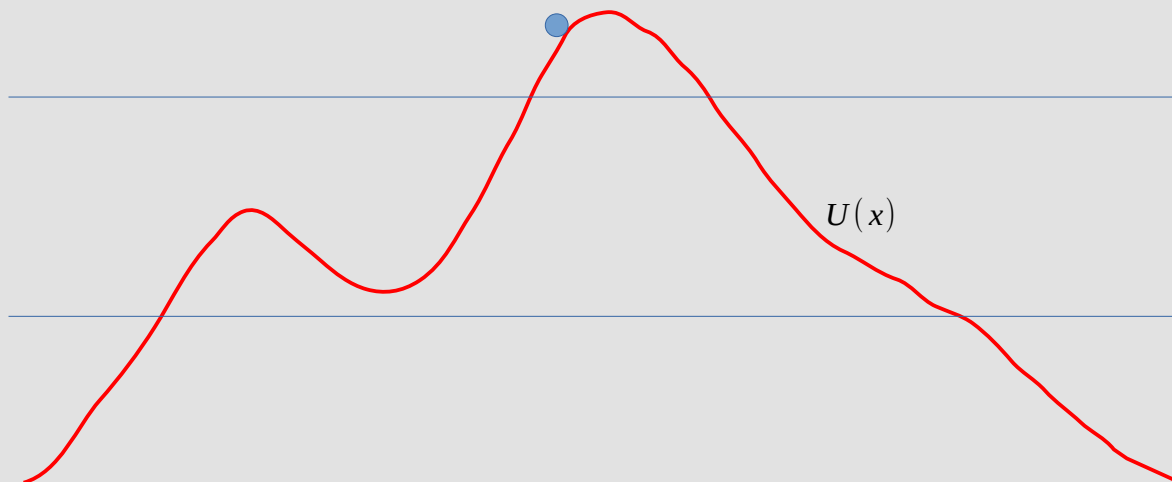
In effetti, durante il moto dell'oscillatore libero, energia potenziale e cinetica si trasformano l'una nell'altra continuamente

## Applicazioni dell'energia potenziale

## Energia potenziale della forza peso

Lo "zero" si può impostare dovunque si voglia, ma una volta fissato non può essere spostato

Il profilo del rilievo è proprio uguale al profilo dell'energia potenziale



## Applicazioni dell'energia potenziale

Energia potenziale parabolica  
(vicino ad un punto stazionario, ogni energia potenziale assomiglia a quella parabolico)

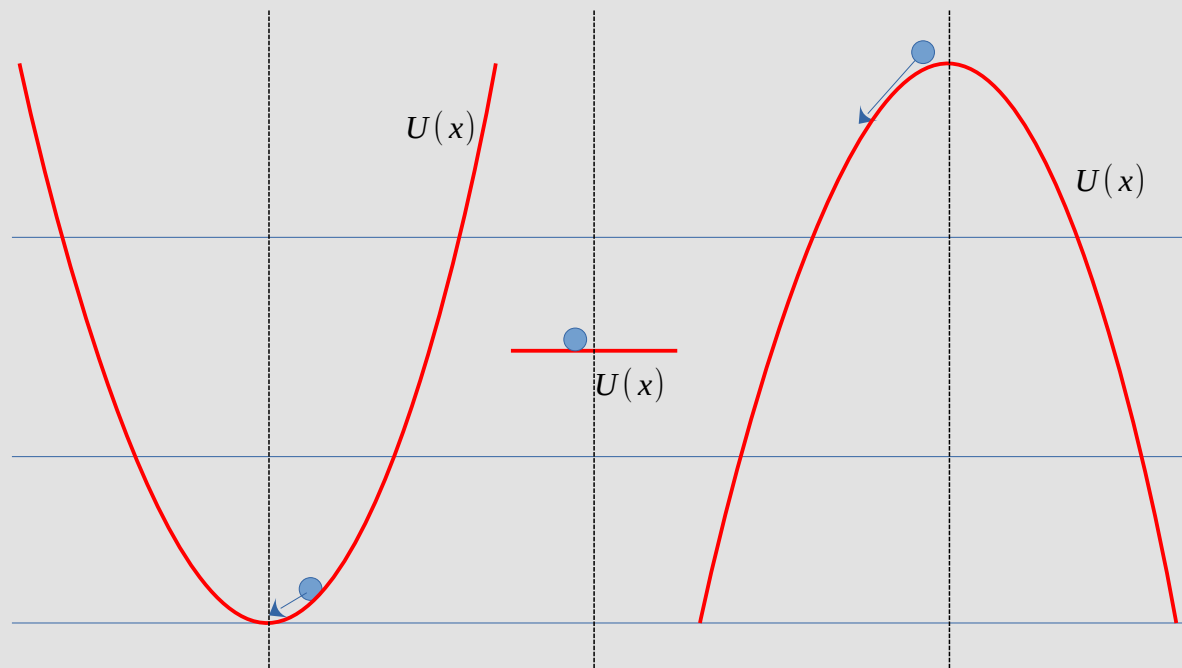
Lo "zero" si può impostare dovunque si voglia, ma una volta fissato non può essere spostato

$\frac{d^2 U}{d x^2} > 0 \Rightarrow$  equilibrio stabile - oscillazioni

$$k = \frac{d^2 U}{d x^2}$$

$\frac{d^2 U}{d x^2} = 0 \Rightarrow$  equilibrio indifferente

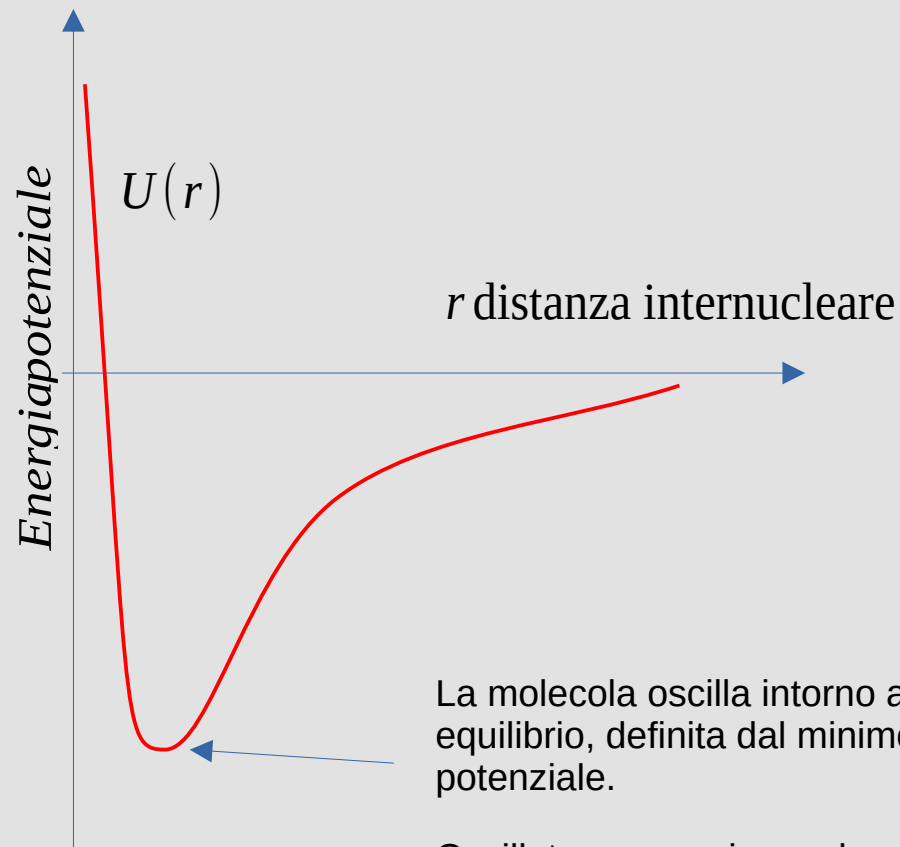
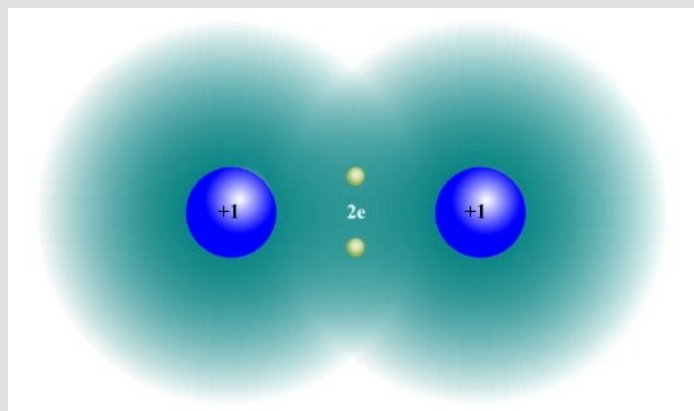
$\frac{d^2 U}{d x^2} < 0 \Rightarrow$  equilibrio instabile - catastrofe



Qualsiasi sistema abbia un'energia potenziale con un minimo esibisce fenomeni oscillatori come l'oscillatore armonico libero!

## Applicazioni dell'energia potenziale

Una molecola biatomica



La molecola oscilla intorno alla posizione di equilibrio, definita dal minimo dell'energia potenziale.

Oscillatore armonico molecolare!

## Campi di forza centrali

Se una forza è diretta sempre verso un punto C, detto centro, e la sua intensità dipende solo dalla distanza dal centro, è detta **forza centrale**

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(\|\vec{r}_C - \vec{r}\|) \text{vers}(\vec{r}_C - \vec{r}) = F(\|\vec{r}_C - \vec{r}\|) \frac{\vec{r}_C - \vec{r}}{\|\vec{r}_C - \vec{r}\|}$$

Una forza centrale è sempre conservativa:

$$\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = F(\|\vec{r}_C - \vec{r}\|) \text{vers}(\vec{r}_C - \vec{r}) \cdot d\vec{s} = F(\|\vec{r}_C - \vec{r}\|) d(\|\vec{r}_C - \vec{r}\|)$$

$$\int_{\Gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \int_{\Delta_i}^{\Delta_f} F(\|\vec{r}_C - \vec{r}\|) d(\|\vec{r}_C - \vec{r}\|) = L(\Delta_i, \Delta_f)$$

$$\Delta_i = \text{distanza iniziale } \|\vec{r}_C - \vec{r}_i\|$$

$$\Delta_f = \text{distanza finale } \|\vec{r}_C - \vec{r}_f\|$$

Il lavoro dipende solo dalle distanze iniziale e finale dal centro, e non dal cammino seguito

## Campi di forza centrali

Anche l'espressione del gradiente si semplifica per una forza centrale

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad } U(\vec{r}) = \frac{-dU(\|\vec{r}_C - \vec{r}\|)}{d\|\vec{r}_C - \vec{r}\|} \text{vers}(\vec{r}_C - \vec{r})$$

Una forza centrale conserva il momento angolare del punto materiale rispetto al centro. Per semplicità, consideriamo il centro della forza come origine del sistema di riferimento e polo del momento.

$$\vec{r}_C = \vec{0}$$

$$\vec{J}_C = \vec{r} \times \vec{p}; \quad \frac{d\vec{J}_C}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} + \vec{r} \times \frac{dU}{dr} \text{vers}(-\vec{r}) = \vec{0} + \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{J}_C}{dt} = \vec{0}$$

## Campi di forza centrali

Se una forza centrale è l'unica che agisce su un punto materiale, poiché il momento angolare è costante, il moto prodotto da una forza centrale deve anche essere piano.

$$\vec{J}_C = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow \vec{J}_C \cdot \vec{r} = 0; \vec{J}_C \cdot \vec{p} = 0$$

I due vettori posizione e velocità/quantità di moto sono sempre ortogonali al vettore momento angolare, che è a sua volta costante: come abbiamo visto, quelle sono equazioni del piano, quindi sia la posizione che la velocità/quantità di moto si mantengono sempre sul piano ortogonale ad un vettore costante.

## Il pendolo semplice

Il pendolo semplice

**Un punto materiale vincolato ad un arco di circonferenza da una fune inestensibile e priva di massa si chiama "pendolo semplice".**

Possiamo trovare le equazioni del moto in due modi:

- 1) Descrizione mediante le forze
- 2) Approccio energetico

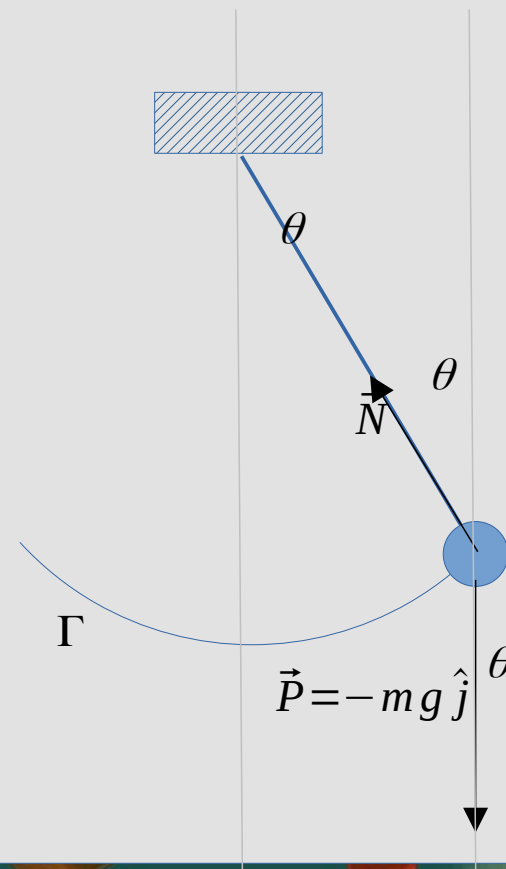
*Metodo 1:*

$$\vec{P} + \vec{N} = m \vec{a}; \quad \vec{r} = l \sin \theta \hat{i} - l \cos \theta \hat{j}$$

proiettiamo sugli assi

$$\begin{cases} -N \sin \theta = m \ddot{x} \\ -mg + N \cos \theta = m \ddot{y} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = l \dot{\theta} \cos \theta; & \ddot{x} = l \ddot{\theta} \cos \theta - l \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \dot{y} = l \dot{\theta} \sin \theta; & \ddot{y} = l \ddot{\theta} \sin \theta + l \dot{\theta}^2 \cos \theta \end{cases}$$

per piccole oscillazioni  $\cos \theta \simeq 1$ ,  $\sin \theta \simeq \theta$  (solo in radianti!)



## Il pendolo semplice

## Moto del pendolo semplice

## Metodo 1:

per piccole oscillazioni  $\cos \theta \simeq 1$ ,  $\sin \theta \simeq \theta$  (solo in radianti!)

$$\begin{cases} -N \sin \theta = m \ddot{x} \\ -m g + N \cos \theta = m \ddot{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -N \sin \theta = m \ddot{x} \\ -m g + N \cos \theta = m \ddot{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = l \frac{d^2}{dt^2} (\sin \theta) = l \frac{d}{dt} (\dot{\theta} \cos \theta) = l (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \simeq l \ddot{\theta} \\ \ddot{y} = l \frac{d^2}{dt^2} (\cos \theta) = l \frac{d}{dt} (-\dot{\theta} \sin \theta) = l (-\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta) \simeq 0 \end{cases}$$

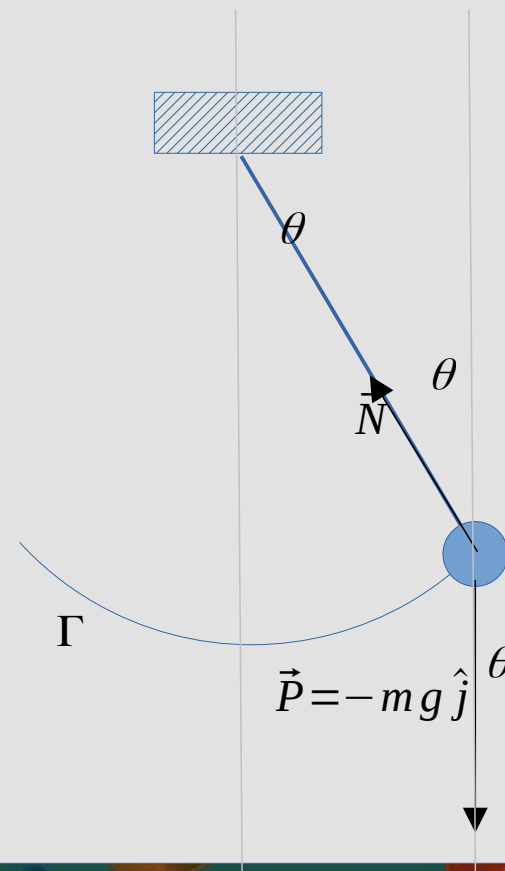
$$\begin{cases} \ddot{x} = l \frac{d^2}{dt^2} (\sin \theta) = l \frac{d}{dt} (\dot{\theta} \cos \theta) = l (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \simeq l \ddot{\theta} \\ \ddot{y} = l \frac{d^2}{dt^2} (\cos \theta) = l \frac{d}{dt} (-\dot{\theta} \sin \theta) = l (-\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta) \simeq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = mg \\ -m g \theta = m l \ddot{\theta} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \end{cases}$$

trascurando i termini di ordine superiore al primo in  $\theta$  e sue derivate

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Otteniamo quindi, **per piccole oscillazioni**, un oscillatore armonico!



Il pendolo semplice

Moto del pendolo semplice

Metodo 2:

$$U + K = \text{cost.}; \quad \frac{dU}{dt} + \frac{dK}{dt} = 0$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (l \dot{\theta})^2; \quad \frac{dK}{dt} = m l^2 \dot{\theta} \ddot{\theta}$$

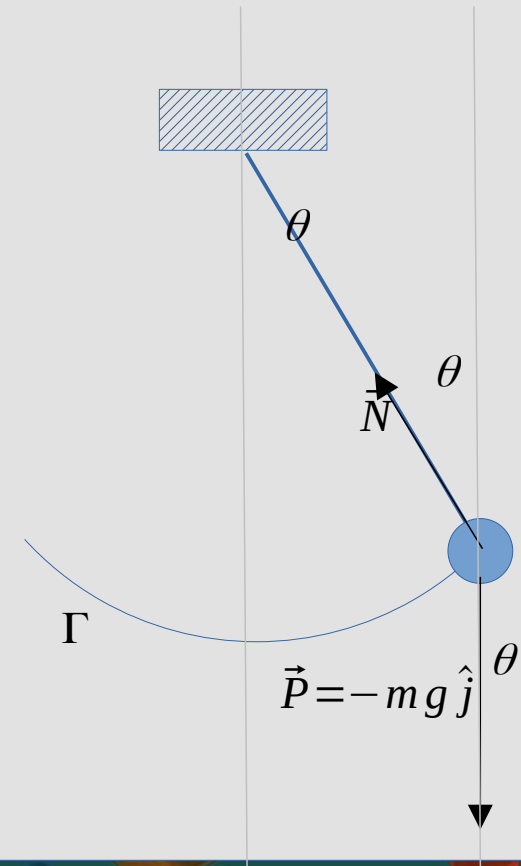
$$U = m g y = -m g l \cos \theta; \quad \frac{dU}{dt} = m g l \dot{\theta} \sin \theta$$

$$m g l \dot{\theta} \sin \theta + m l^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = 0$$

questo deve valere anche dove  $\dot{\theta} \neq 0 \Rightarrow g \sin \theta + l \ddot{\theta} = 0$

per piccole oscillazioni  $\sin \theta \simeq \theta \Rightarrow g \theta + l \ddot{\theta} = 0$

$$\frac{g}{l} \theta + \ddot{\theta} = 0$$



## Il pendolo semplice

Il pendolo semplice, *per piccole oscillazioni*, si comporta come un oscillatore armonico libero

Il periodo delle piccole oscillazioni dipende solo dalla lunghezza del filo e dall'accelerazione di gravità, ma non dall'ampiezza di oscillazione

Questo ha consentito di utilizzare i pendoli per fabbricare orologi

Notiamo anche che si tratta di un moto piano, quindi il piano di oscillazione non varia

Il pendolo di Foucault evidenzia la rotazione terrestre: il piano di oscillazione non varia, mentre la Terra ruota



## L'attrito radente

## L'attrito radente

È esperienza comune che due corpi a contatto tendono ad opporsi al moto relativo. Questo è dovuto alle interazioni tra le superfici e in generale dipende dalla coppia di materiali a contatto e dalla struttura delle superfici e dalla temperatura. La fisica del contatto tra due corpi può essere molto complicata, ma per molte applicazioni valgono due leggi di forza **passiva** molto semplici.

Si chiama **attrito radente** la forza che ciascuno dei due corpi a contatto esercita sull'altro e che si oppone al moto relativo.

- 1) Se i due corpi sono in moto relativo, si parla di **attrito radente dinamico**. La forza di ciascun corpo sull'altro ha la direzione del moto relativo, verso opposto alla velocità relativa e modulo proporzionale a quello della reazione vincolare che impedisce la compenetrazione.

È ovvio che debba essere legata alla reazione vincolare: poiché l'unico ente che stiamo usando per modellare la resistenza alla compenetrazione è la reazione vincolare, l'attrito radente deve dipendere dalla reazione vincolare, **ma non fa parte della reazione vincolare**.

$$\vec{F}_{A,d} = -\mu_d \|\vec{N}\| \hat{v}_{rel}$$

## L'attrito radente

- 2) Se i due corpi non sono in moto relativo, ma esistono forze che tendono a metterli in moto relativo (ossia a far sì che ciascuno strisci sull'altro) si parla di **attrito radente statico**. La forza di ciascun corpo sull'altro bilancia la componente della risultante di tutte le altre forze lungo la superficie di contatto, con modulo limitato ad un fattore proporzionale al modulo della reazione vincolare che impedisce la compenetrazione.

In questo caso si dà un limite superiore. Se il modulo della componente della risultante delle forze lungo il piano tangente alla superficie di contatto supera il limite, si ha il distacco e il moto relativo ha inizio. Se è inferiore a questo limite, il modulo dell'attrito radente statico ha un valore da determinarsi con la condizione che bilanci tutte le altre forze tangenti alla superficie. Anche in questo caso, **l'attrito radente statico è legato alla reazione vincolare ma non fa parte di essa.**

$$\|\vec{F}_{A,s}\| \leq \mu_s \|\vec{N}\|; \quad \text{in generale } 1 > \mu_s > \mu_d$$

## L'attrito radente

Attenzione: l'attrito radente (sia statico che dinamico) **non dipende dall'area di contatto** tra i due corpi.

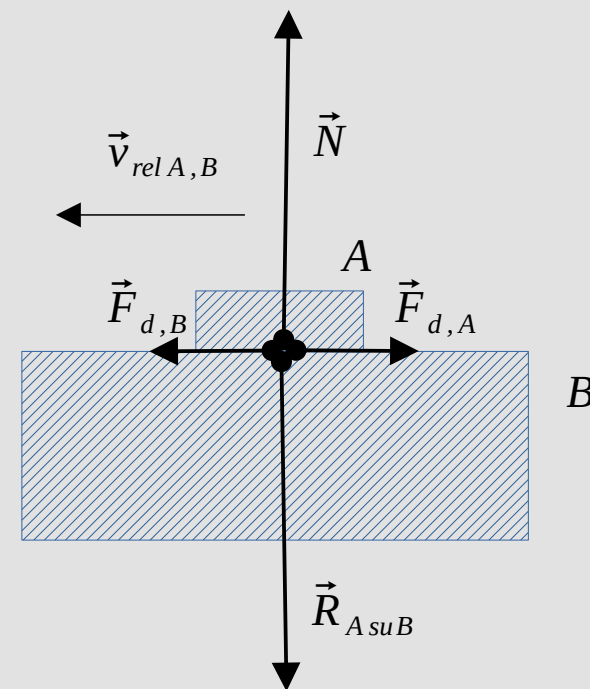
Il motivo è abbastanza ovvio: se si riduce l'area di contatto, la forza che impedisce la compenetrazione è la stessa di prima ma viene distribuita su un'area più piccola; in modulo rimane uguale. Ciascun elemento di superficie contribuirà con un'interazione più forte. Anche il contributo all'attrito aumenterà, ma se rimane costante la forza che impedisce la compenetrazione, anche l'attrito rimarrà costante.

Sia l'attrito radente statico che quello dinamico sono esercitati da ciascuno dei due corpi sull'altro, e come prescritto dal III Principio formano coppie di forze di braccio nullo.

A destra: condizione di attrito radente dinamico

$$L_{A,d} = \int_{\Gamma} \vec{F}_{A,d} \cdot \vec{v} dt = - \int_{\Gamma} \mu_d \|\vec{N}\| \hat{v}_{rel} \cdot \vec{v} dt = - \mu_d \int_{\Gamma} \|\vec{N}\| v dt \leq 0$$

con forza costante:  $L_{A,d} = -\mu_d \|\vec{N}\| \Delta s$



## L'attrito radente

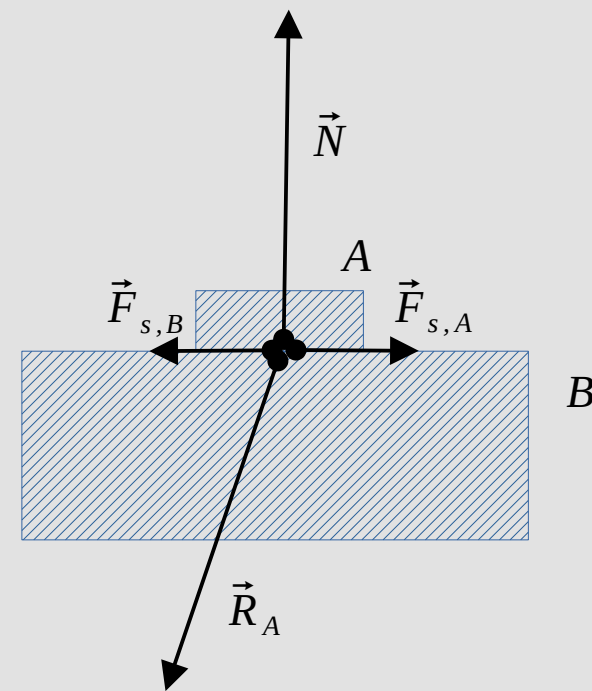
Attenzione: l'attrito radente (sia statico che dinamico) **non dipende dall'area di contatto** tra i due corpi.

Sia l'attrito radente statico che quello dinamico sono esercitati da ciascuno dei due corpi sull'altro, e come prescritto dal III Principio formano coppie di forze di braccio nullo.

A destra: condizione di attrito radente statico

$$L_{A,s} = \int_{\Gamma} \vec{F}_{A,s} \cdot \vec{v} dt = 0 \quad \text{perché} \quad \vec{v} = \vec{0}$$

Nei problemi con attrito radente, se non è esplicitamente specificata la condizione di moto relativo, bisogna verificare se si realizzi la condizione di distacco (ossia se le forze dirette lungo la superficie di contatto soddisfino la disequaglianza dell'attrito statico). In caso di distacco, si applica l'attrito dinamico.



## L'oscillatore armonico smorzato

## L'oscillatore armonico smorzato

Aggiungiamo uno smorzamento di tipo viscoso all'oscillatore armonico. Possiamo pensare ad esempio ad un pendolo che si muove in aria. In generale comparirà una forza dissipativa proporzionale alla velocità.

$$F_{\text{elast},x} + F_{\text{diss},x} = m a_x; \quad -kx - b v_x = m a_x; \quad kx + b \dot{x} + m \ddot{x} = 0; \quad \frac{k}{m} x + \frac{b}{m} \dot{x} + \ddot{x} = 0$$

$$\omega_0^2 x + \gamma \dot{x} + \ddot{x} = 0$$

Anche questa è un'equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenea.

Proponiamo una soluzione del tipo:

$$x(t) = A e^{\lambda t}; \quad \dot{x}(t) = \lambda A e^{\lambda t}; \quad \ddot{x}(t) = \lambda^2 A e^{\lambda t}$$

equazione algebrica associata

$$\omega_0^2 + \lambda \gamma + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

## L'oscillatore armonico smorzato

## Caso

$$\gamma/2 < \omega_0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$
$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t})$$

Scegliamo i coefficienti complessi  $C_1$  e  $C_2$  in modo che il risultato sia reale o equivalentemente

$$\gamma/2 < \omega_0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$
$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} [A_c \cos(\omega t) + A_s \sin(\omega t)] = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\omega t + \phi)$$

L'oscillatore armonico smorzato

Questa soluzione è valida per  $\gamma < 2\omega_0$  : **oscillatore sottosmorzato**

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}t + \phi\right)$$

Al solito, le costanti si determinano dalle condizioni iniziali.

Ad ogni ciclo abbiamo

$$\begin{aligned} U_{\text{elastica}} &= \frac{1}{2} k x_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} k A \left( e^{-\frac{\gamma}{2}nT} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} k A^2 e^{-n\gamma T} = U_0 e^{-n\gamma T} \end{aligned}$$

Ad ogni ciclo l'energia decade di  $e^{-\gamma T}$

L'oscillatore armonico smorzato

Per  $\gamma > 2\omega_0$  l'oscillatore è detto **ultrasmorzato**. La soluzione è scritta in termini di due esponenziali negativi:

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-\left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}\right)t} + B e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{\left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}\right)t}$$

Non compaiono più termini oscillanti.

Scegliendo opportunamente i coefficienti A e B è possibile un passaggio per la posizione centrale, ma solo una volta.

L'oscillatore armonico smorzato

Infine consideriamo il caso di  $\gamma = 2\omega_0$  ossia di **smorzamento critico**. Dobbiamo comunque avere due soluzioni linearmente indipendenti.

Proponiamo

$$\begin{aligned}x(t) &= A e^{-\frac{\gamma}{2}t} + B t e^{-\frac{\gamma}{2}t} = A e^{-\omega_0 t} + B t e^{-\omega_0 t} \\ \dot{x}(t) &= -\omega_0 A e^{-\omega_0 t} - \omega_0 B t e^{-\omega_0 t} + B e^{-\omega_0 t} \\ \ddot{x}(t) &= \omega_0^2 A e^{-\omega_0 t} + \omega_0^2 B t e^{-\omega_0 t} - 2\omega_0 B e^{-\omega_0 t}\end{aligned}$$

Effettuiamo le sostituzioni

$$\begin{aligned}\omega_0^2 x + \gamma \dot{x} + \ddot{x} &= \omega_0^2 x + 2\omega_0 \dot{x} + \ddot{x} = \\ &= \omega_0^2 A e^{-\omega_0 t} + \omega_0^2 B t e^{-\omega_0 t} + 2\omega_0 \left( -\omega_0 A e^{-\omega_0 t} - \omega_0 B t e^{-\omega_0 t} + B e^{-\omega_0 t} \right) + \\ &\quad + \omega_0^2 A e^{-\omega_0 t} + \omega_0^2 B t e^{-\omega_0 t} - 2\omega_0 B e^{-\omega_0 t} = 0\end{aligned}$$

L'oscillatore armonico smorzato

In definitiva si ha:

- **Oscillatore sottosmorzato**

$$\gamma < 2 \omega_0 \Rightarrow x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}t + \phi\right)$$

- **Oscillatore ultrasmorzato**

$$\gamma > 2 \omega_0 \Rightarrow x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}t} + B e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}t}$$

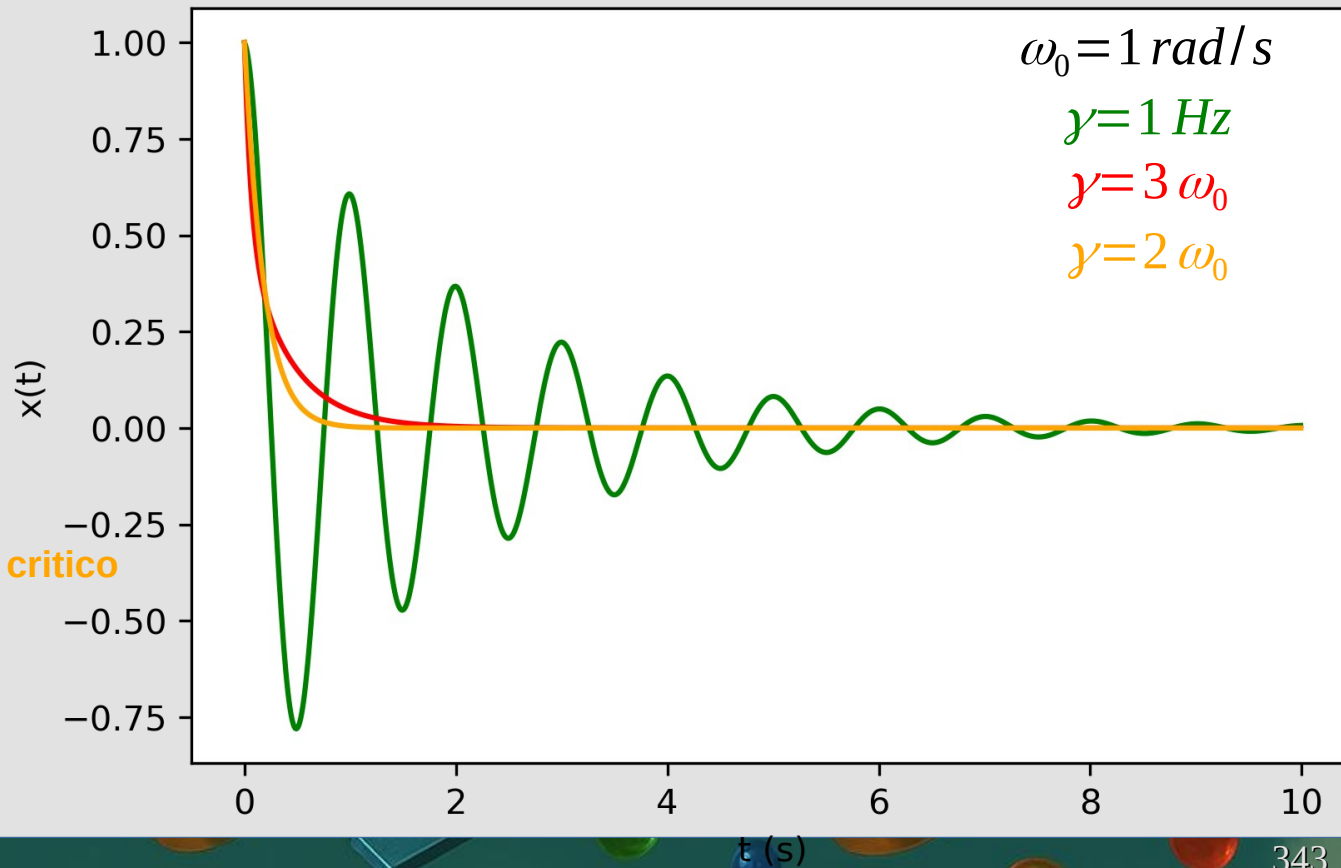
- **Oscillatore con smorzamento critico**

$$\gamma = 2 \omega_0 \Rightarrow x(t) = A e^{-\omega_0 t} + B t e^{-\omega_0 t}$$

L'oscillatore armonico smorzato

In definitiva si ha:

- Oscillatore **sottosmorzato**
- Oscillatore **ultrasmorzato**
- Oscillatore con **smorzamento critico**



## L'oscillatore armonico smorzato

Consideriamo adesso una sollecitazione forzante sinusoidale

$$F_{\text{elast},x} + F_{\text{diss},x} + F_{\text{osc}} = m a_x; \quad -k x - b v_x + F_0 \cos(\omega t) = m a_x; \quad k x + b \dot{x} + m \ddot{x} = F_0 \cos(\omega t);$$

$$\frac{k}{m} x + \frac{b}{m} \dot{x} + \ddot{x} = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

$$\omega_0^2 x + \gamma \dot{x} + \ddot{x} = F_0 \omega_0^2 \cos(\omega t)$$

$$\omega_0^2 x + \gamma \dot{x} + \ddot{x} = f \cos(\omega t)$$

$$\text{Re}(\omega_0^2 x + \gamma \dot{x} + \ddot{x}) = \text{Re}(f e^{i\omega t}) \Rightarrow \omega_0^2 x + \gamma \dot{x} + \ddot{x} = f e^{i\omega t}$$

Proponiamo un integrale particolare della forma

$$x_p(t) = A e^{i\omega t}$$

## L'oscillatore armonico smorzato

Sostituiamo ed usiamo le proprietà degli esponenziali e dei numeri complessi

$$A \omega_0^2 e^{i\omega t} + i\omega \gamma A e^{i\omega t} - A \omega^2 e^{i\omega t} = f e^{i\omega t} \quad \forall t$$

$$A = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega \gamma} = \frac{f}{\left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2 \right]^{1/2}} \left( \omega_0^2 - \omega^2 - i\omega \gamma \right)$$

Ricaviamo separatamente il modulo del coefficiente e la fase (ricordiamo  $\mathbf{a + i b}$ ):

$$|A| = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}}; \quad \phi = \arg A = -\arctan\left(\frac{\omega \gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

$$x(t) = |A| \cos(\omega t + \phi)$$

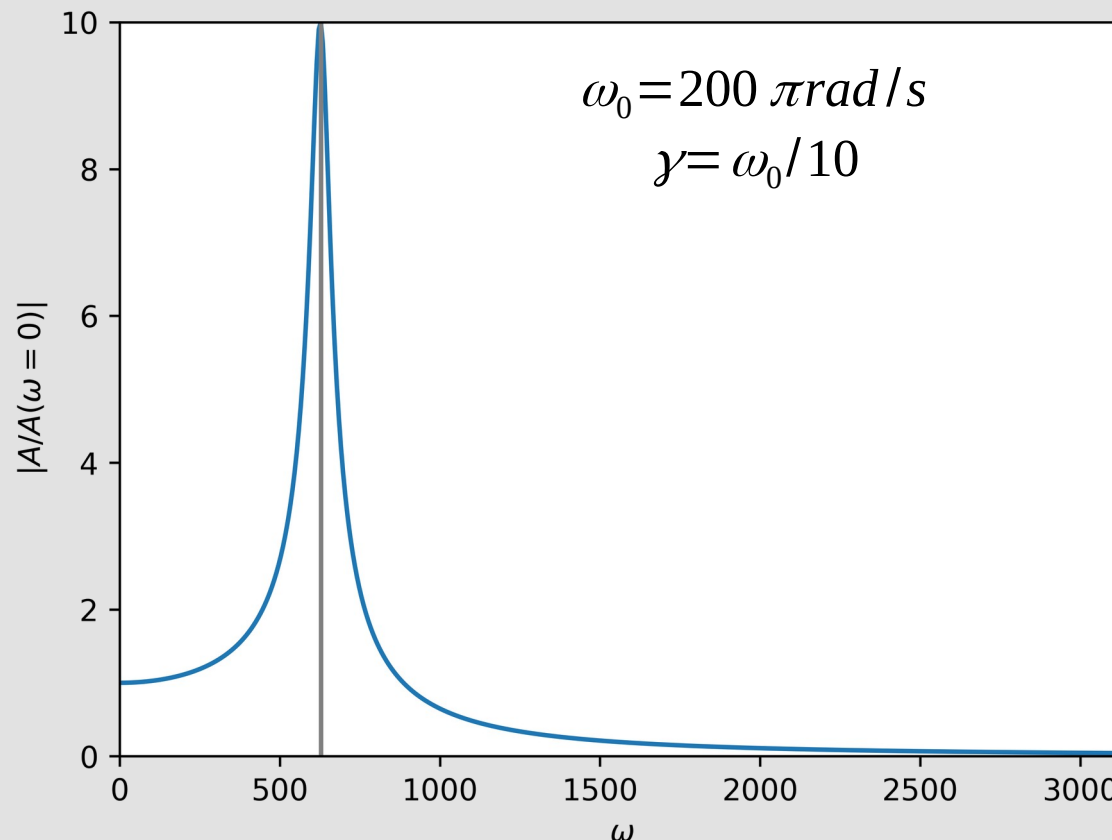
La costante di fase è negativa poiché il moto è in ritardo rispetto alla forzante

## L'oscillatore armonico smorzato

Risposta in funzione della pulsazione

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \phi = \frac{-\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ A = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2}} \end{array} \right.$$

Anche l'oscillatore armonico smorzato esibisce il fenomeno della **risonanza**

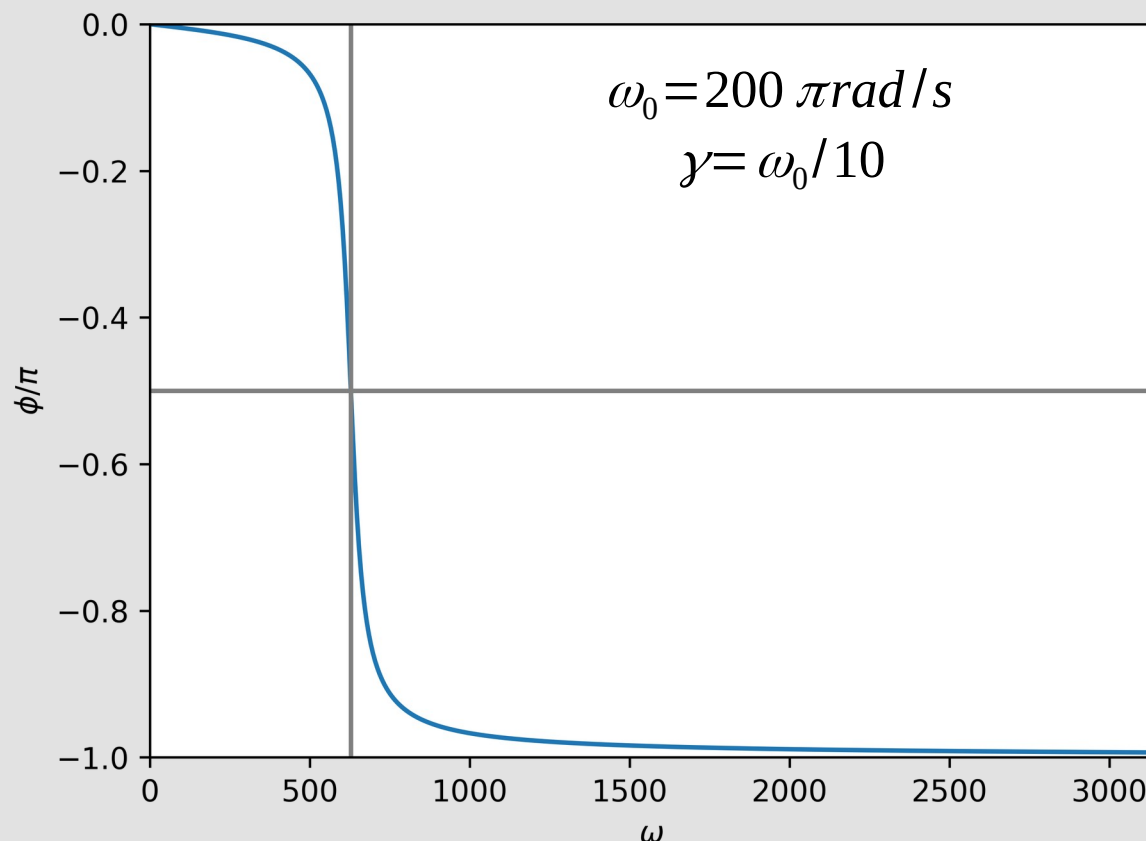


## L'oscillatore armonico smorzato

Sfasamento in funzione della pulsazione

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \phi = \frac{-\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ A = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2}} \end{array} \right.$$

Alla risonanza, lo sfasamento tra forzante e risposta è di  $\pi/2$  ( $90^\circ$ )



Ricordiamo l'oscillatore armonico

Si può ottenere mettendo lo smorzamento a 0

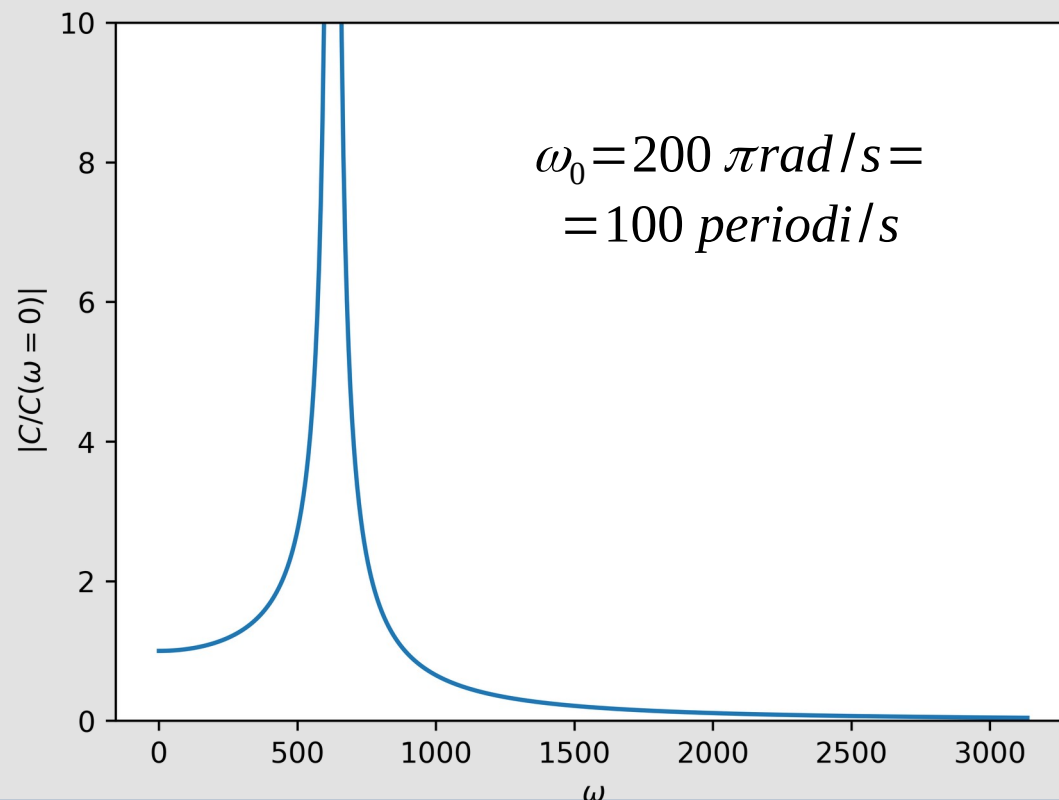
$$\frac{C(\omega)}{a_f} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}; \quad \frac{C(\omega)}{C(0)} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Notiamo anche che

$$\frac{C(\omega)}{C(0)} > 0 \text{ per } \omega < \omega_0$$

$$\frac{C(\omega)}{C(0)} < 0 \text{ per } \omega > \omega_0$$

Per  $\omega \rightarrow \omega_0$  la risposta diverge, e non è definita quando vale l'uguaglianza



## **La resistenza fluidodinamica in regime turbolento**

## Resistenza di un fluido in regime turbolento

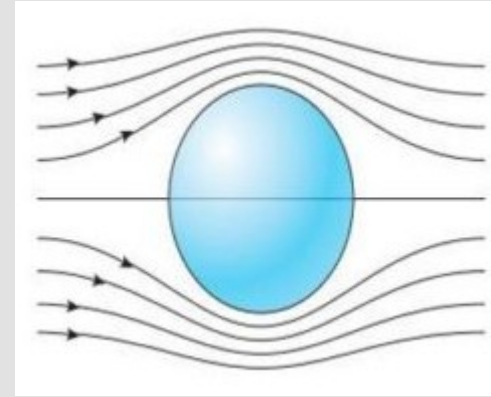
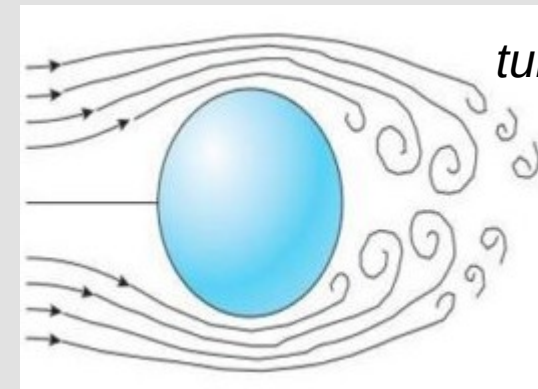
Il caso di resistenza viscosa vale solo per oggetti “piccoli” e “lenti”. Questi concetti non hanno senso assoluto, ma vanno resi quantitativi.

La resistenza viscosa predomina quando il moto è *laminare*, ossia si svolge come se le particelle del fluido scorressero in lamine le une sulle altre, e le “lamine” rimangono attaccate al corpo che avanza.

Tuttavia, quando la velocità relativa aumenta molto, per inerzia le particelle del fluido finiscono per staccarsi dal corpo. Lo spazio, che rimarrebbe vuoto, viene subito riempito, ma in maniera caotica.

Nella scia del corpo il moto diventa *turbolento* e si formano vortici.

La resistenza non è più dovuta soltanto all'effetto di “freno” della viscosità, ma c'è uno sbilancio di pressione tra fronte e retro del corpo.

*laminare**turbolento*

## Resistenza di un fluido in regime turbolento

Il numero di Reynolds è un numero adimensionale, che rende conto di quanto il moto possa essere considerato laminare e quanto turbolento

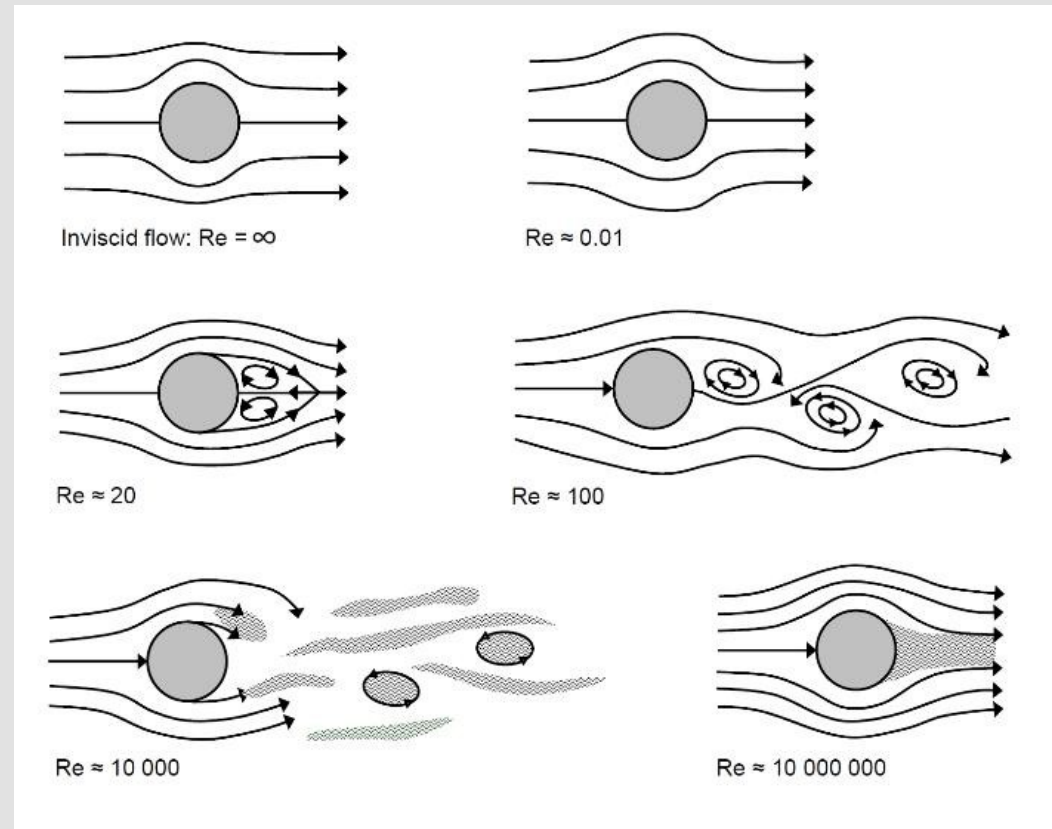
$$R = \frac{\rho v D}{\eta}$$

$\rho$  densità del mezzo

$\eta$  viscosità del mezzo

$v$  velocità del corpo

$D$  una lunghezza caratteristica del problema



## Resistenza di un fluido in regime turbolento

In regime di moto turbolento, la resistenza è data da

$$F_r = \frac{1}{2} \rho S C_x v^2$$

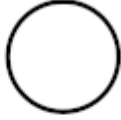




$S$  area della sezione trasversa

$C_x$  (o  $C_d$  coefficiente di resistenza)

Il coefficiente di resistenza dipende dalla forma, e in definitiva da quanto i filetti fluidi rimangono attaccati al corpo

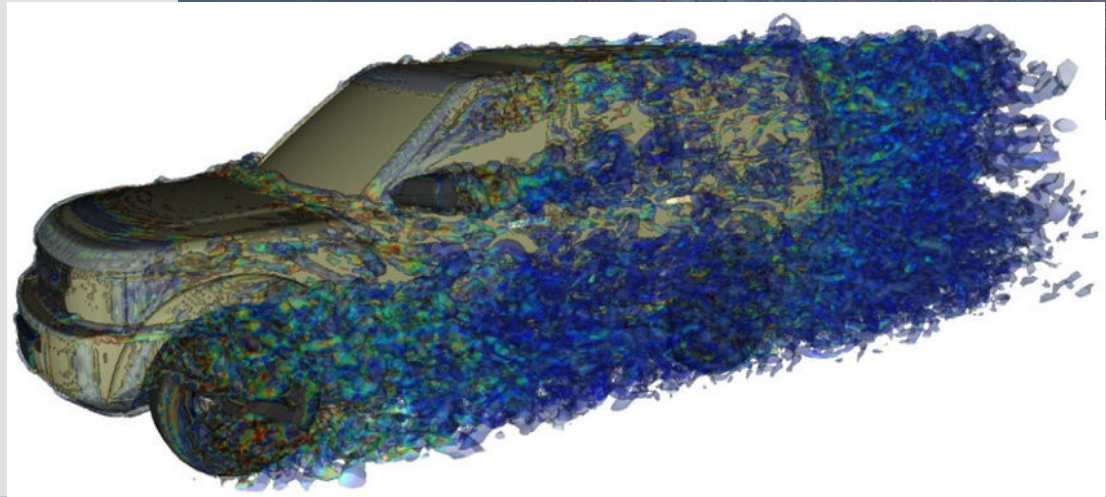
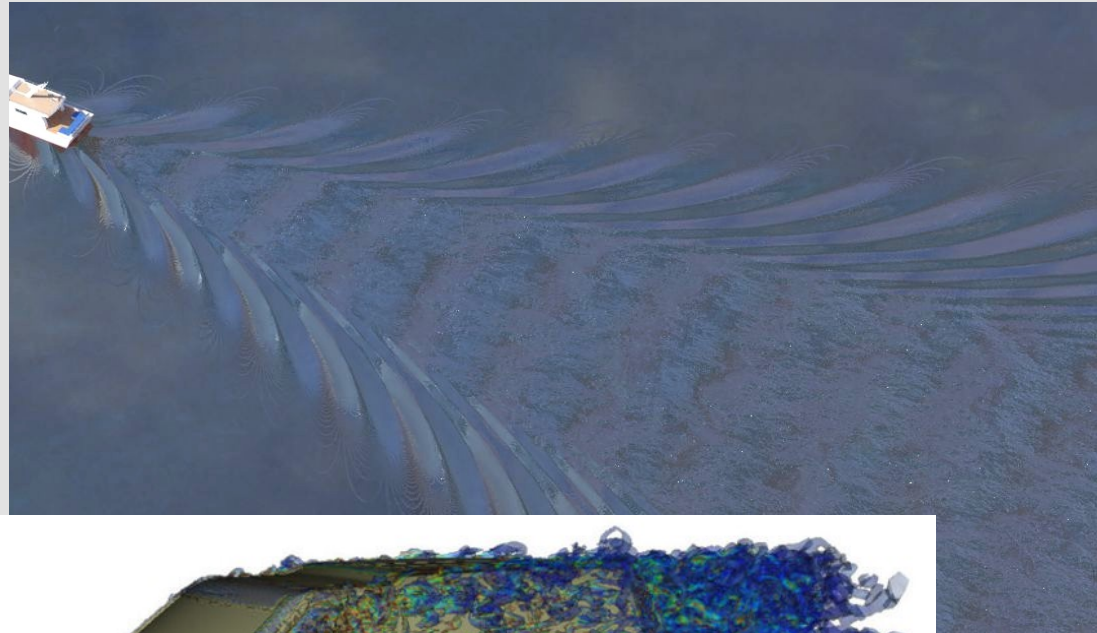
*La resistenza non dipende più dalla viscosità!*

*La resistenza cresce con il quadrato della velocità!*

Shape	Drag Coefficient
Sphere → 	0.47
Half-sphere → 	0.42
Cube → 	1.05
Streamlined Body → 	0.04
Streamlined Half-body → 	0.09

## Resistenza di un fluido in regime turbolento

Questi effetti si vedono bene nel moto delle navi,  
delle automobili e degli aerei...



## Resistenza di un fluido in regime turbolento

...ma anche di ponti e grattacieli!

