

GRAVITAZIONE



Gravitazione

Fino ad ora abbiamo incontrato la forza peso, definita come approssimazione in una regione piccola dell'attrazione di tutti i corpi verso il centro della Terra.

La particolarità della legge di forza associata è che la forza di attrazione è proporzionale alla massa inerziale.

D'altra parte, per il III Principio della Dinamica, dobbiamo ammettere che ciascun corpo eserciti sulla Terra una uguale forza di attrazione.

Si deve ancora a Newton l'intuizione, verificata da dati preesistenti e misure successive, che il moto reciproco dei corpi celesti sia accelerato dalla gravità. Newton intuì che la Luna "cade continuamente" verso la Terra, e che lo stesso fa la Terra verso la Luna e verso il Sole. Questa continua accelerazione genera i moti orbitali.

"Costruiamo" l'attrazione gravitazionale a partire da considerazioni di principio. Consideriamo la massa della Terra M e quella m di un corpo di prova.

$$\|\vec{F}_{corpo}\| = \|\vec{F}_{Terra}\| \Rightarrow C_1 m = C_2 M \Rightarrow \|\vec{F}_{Terra}\| = \|\vec{F}_{corpo}\| = C_3 m M$$

Gravitazione

Osserviamo che l'accelerazione della Luna è molto minore di quella che hanno i corpi sulla Terra. Conoscendo la distanza Terra – Luna, dalle osservazioni ricaviamo che:

$$\|\vec{a}_{Luna}\| \simeq \|\vec{a}_{mela}\| \frac{r_{Terra}^2}{d_{Terra, Luna}^2} \Rightarrow C_3 = \frac{G}{r^2} \quad G \text{ è una costante da determinare}$$

Considerazioni:

- 1) Abbiamo inserito il raggio terrestre per l'accelerazione della mela (o qualche altro corpo): ciò implica che la Terra si possa considerare tutta concentrata nel suo centro;
- 2) La costante C_3 esprime solo una proporzionalità alle masse in gioco, ma dipende dalla distanza. L'ultima costante che dobbiamo introdurre è G , per rispettare la corretta dimensionalità.

$$\|\vec{F}_{m,M}\| \Rightarrow G \frac{mM}{r^2}$$

Gravitazione

In generale, possiamo dire che:

$$[G] = \left[F \frac{r^2}{mM} \right] = [M][L][T^{-2}][L^2][M^{-2}] = [M^{-1}][T^{-2}][L^3]$$

Il valore di g , accelerazione gravitazionale terrestre sul livello del mare, è legato a G :

$$\|\vec{F}_{m,M}\| \Rightarrow G \frac{mM}{r^2} = mg \Rightarrow G \frac{M}{r^2} = g$$

Tuttavia non possiamo misurare direttamente la massa terrestre.

Abbiamo bisogno di esperimenti di misura diretta della costante a partire da masse e distanze note.

Gravitazione

Esperimento di Cavendish con bilancia di torsione

La posizione di equilibrio è quella che bilancia il momento esercitato dal filo di sospensione e quello della forza di attrazione tra le masse. Rispetto alla posizione di riposo, il momento dovuto alla torsione è:

$$\vec{M}_{Torsione} = -K \theta \hat{k}$$

La forza tra ciascuna coppia di masse è:

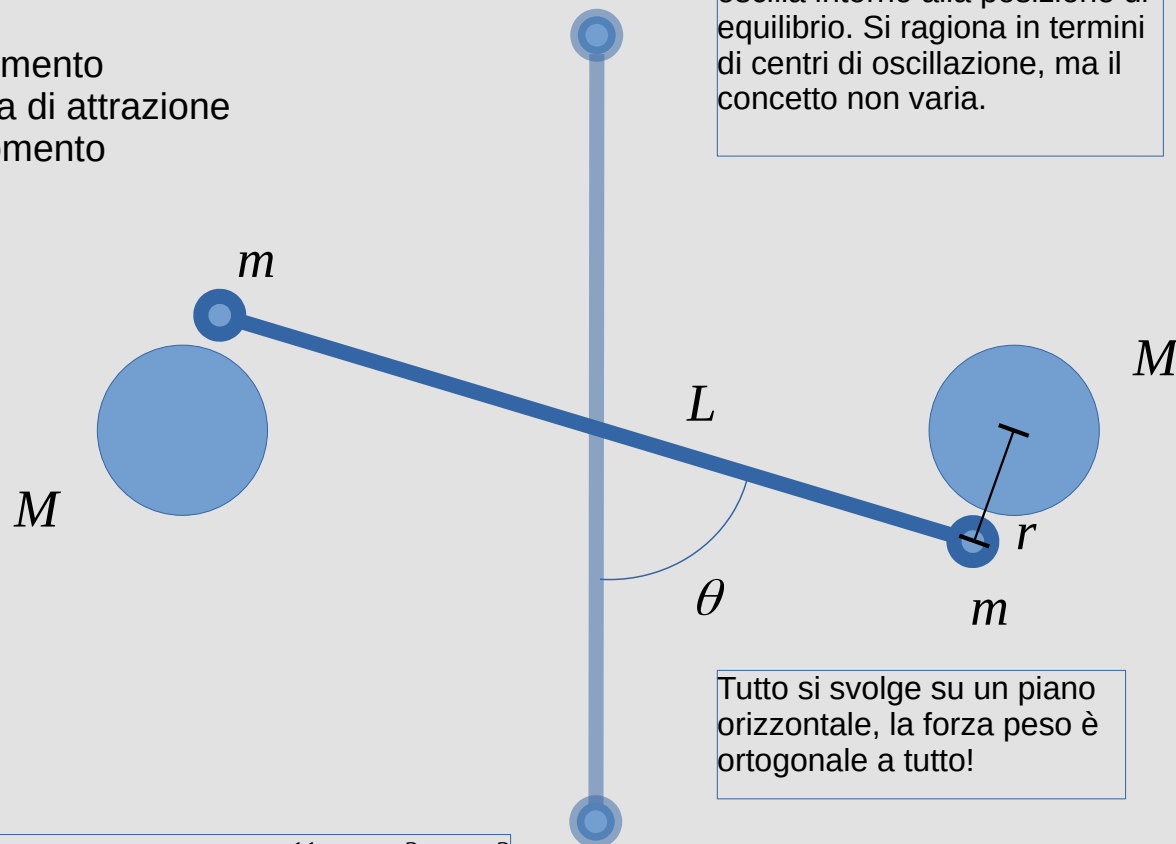
$$\|\vec{F}_{mM}\| = G \frac{mM}{r^2}$$

$$\vec{M}_{mM} = 2G \frac{mML}{r^2} \hat{k}$$

$$\vec{M}_{mM} + \vec{M}_{Torsione} = \vec{0} \Rightarrow 2G \frac{mML}{r^2} = K \theta$$

$$G = \frac{K \theta r^2}{2mML}$$

$$G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$



In realtà il pendolo di torsione oscilla intorno alla posizione di equilibrio. Si ragiona in termini di centri di oscillazione, ma il concetto non varia.

Tutto si svolge su un piano orizzontale, la forza peso è ortogonale a tutto!

Gravitazione

Quindi la forma completa della forza gravitazionale che agisce *dal corpo 2 sul corpo 1* deve essere:

$$\vec{F}_{m_1, m_2} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{1 \rightarrow 2} = G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

e simmetricamente, per la forza *dal corpo 1 sul corpo 2* :

$$\vec{F}_{m_2, m_1} = G \frac{m_2 m_1}{r_{21}^2} \hat{r}_{2 \rightarrow 1} = G \frac{m_2 m_1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

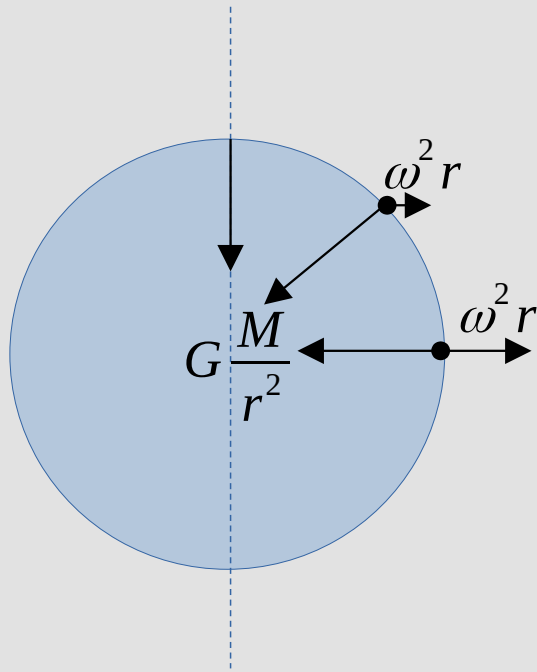
Questa forza è **sempre attrattiva**. La costante G è la **costante gravitazionale universale** e vale per qualunque coppia di corpi nell'Universo.

Possiamo quindi determinare la massa della Terra con un oggetto posto sulla sua superficie:

$$G \frac{M}{r^2} = g \Rightarrow M = g \frac{r^2}{G} \simeq 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

Gravitazione

Attenzione! Non dobbiamo dimenticare di tener conto del fatto che la Terra gira, quindi l'accelerazione gravitazionale si compone con la forza centrifuga. Ai poli non c'è contributo centrifugo, all'Equatore è massimo.



$$\omega = 2 \pi \text{rad} / 86400 \text{ s} = 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

$$r = 6371 \text{ km} = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$$

$$\omega^2 r = 0,034 \text{ m/s}^2 \text{ all'Equatore}$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2 \text{ ai poli}; 9,78 \text{ m/s}^2 \text{ all'Equatore}$$

piccole deviazioni dalla verticale tra Equatore e poli

Il campo gravitazionale

Tutti i corpi (punti materiali) che si trovano in presenza di una massa M sperimentano una forza proporzionale ad essa.

$$\vec{F}_i = G M \frac{m_i}{\|\vec{r}_M - \vec{r}_i\|^2} \text{vers}(\vec{r}_M - \vec{r}_i)$$

Questa ha la forma di un'azione a distanza. Se aggiungiamo altre masse, gli effetti si sommeranno. È concettualmente comodo introdurre il concetto di **campo gravitazionale**, in modo che ogni massa interagisca con il campo e non con la massa generatrice.

$$\vec{F}_i = m_i \vec{g}_M; \quad \vec{g}_M(\vec{r}) = G \frac{M}{\|\vec{r}_M - \vec{r}\|^2} \text{vers}(\vec{r}_M - \vec{r})$$

Quindi il campo risulta definito solo dalla massa generatrice, e la forza dall'accoppiamento della massa del punto materiale i -esimo con il campo nel punto occupato dal punto materiale i -esimo.

Il Teorema di Gauss per il campo gravitazionale

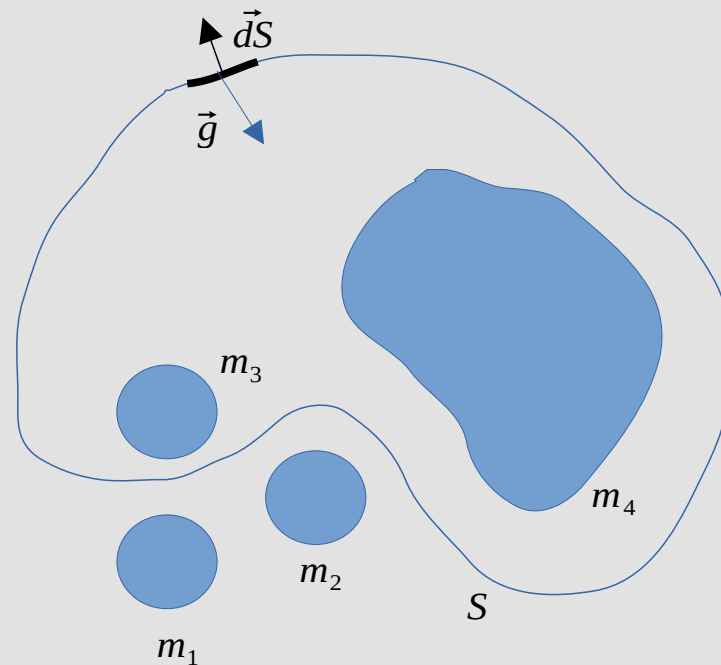
Il teorema di Gauss è legato alla proprietà fondamentale del campo gravitazionale di scalare con il quadrato della distanza. Lo stesso teorema vale per tutti i campi centrali con dipendenza $1/r^2$.

Questo teorema consente di calcolare facilmente il campo gravitazionale di distribuzioni di massa particolarmente simmetriche, o comunque riconducibili ad esse.

Consideriamo una qualsiasi distribuzione di masse (possiamo assumerla con simmetria sferica oppure no, questo non è importante). Consideriamo inoltre una superficie chiusa S , che può racchiudere tutte le masse, nessuna, o parte di esse.

Il *flusso* del campo gravitazionale è così definito:

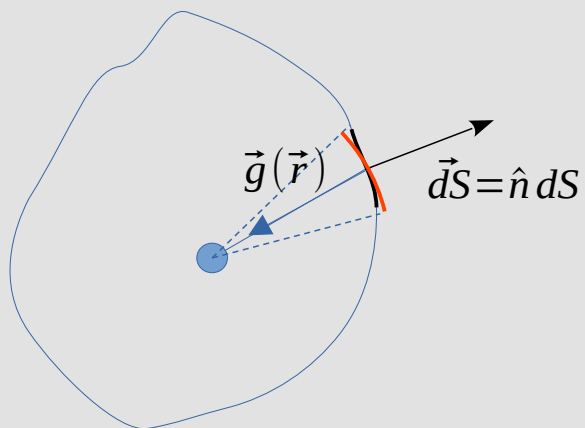
$$\Phi = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{g} \cdot \hat{n} dS$$



Il Teorema di Gauss per il campo gravitazionale

Consideriamo una superficie chiusa intorno ad un punto materiale dotato di attrazione gravitazionale.

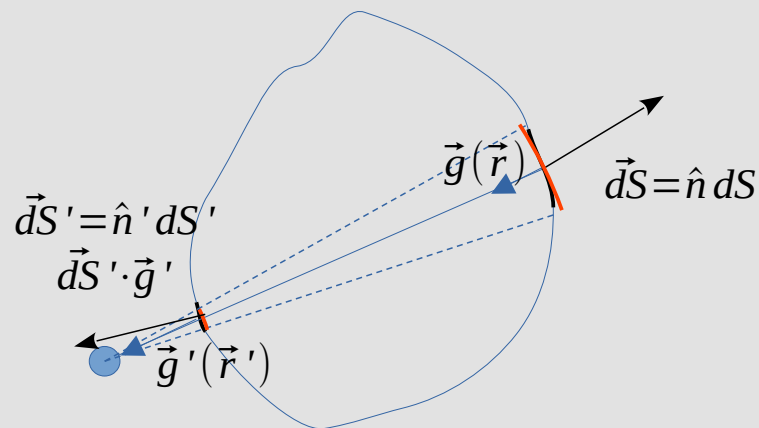
Per un punto interno tutti i contributi al flusso sono negativi. Per uno esterno, si annullano a coppie.



$$\vec{dS} \cdot \hat{r} = r^2 d\Omega$$

$$\vec{dS} \cdot \vec{g} = \vec{dS} \cdot \hat{g} \|\vec{g}\| = -\vec{dS} \cdot \hat{r} G \frac{m}{r^2} = -r^2 d\Omega G \frac{m}{r^2}$$

$$\vec{dS} \cdot \hat{g} = -G m d\Omega$$



$$\vec{dS} \cdot \hat{r} = r^2 d\Omega$$

$$\vec{dS} \cdot \vec{g} = \vec{dS} \cdot \hat{g} \|\vec{g}\| = -\vec{dS} \cdot \hat{r} G \frac{m}{r^2} = -r^2 d\Omega G \frac{m}{r^2} = -G m d\Omega$$

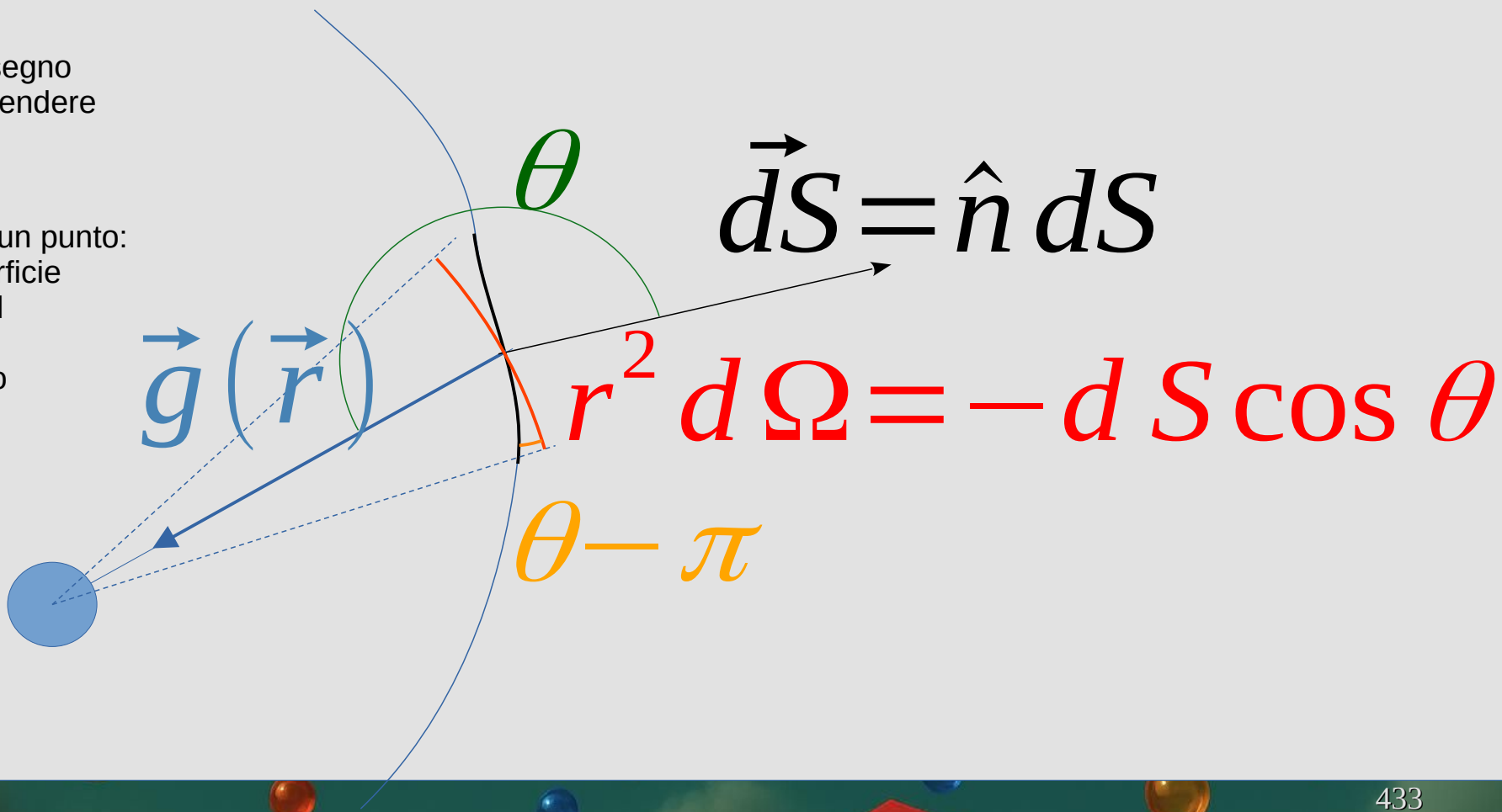
$$\vec{dS}' \cdot \vec{g}' = G m d\Omega' = G m d\Omega$$

Il flusso e gli angoli solidi

Ingrandiamo il disegno per meglio comprendere

Angolo solido da un punto:
rapporto tra superficie
 dS e quadrato del
raggio della sfera
centrata nel punto

Tutta l'area
della superficie
sferica: 4π



Il Teorema di Gauss per il campo gravitazionale

In definitiva, per ogni elemento di superficie chiusa intorno alla distribuzione di masse il contributo al flusso è

$$d\Phi = -G m d\Omega$$

mentre per quelle esterne alla superficie chiusa si ha: $d\Phi = 0$

Per il flusso di campo gravitazionale di una massa abbiamo, **indipendentemente dalla forma della superficie:**

$$\Phi_i = \int_{\Omega} \frac{d\Phi_i}{d\Omega} d\Omega = \begin{cases} m_i \text{ interna} \rightarrow -G m_i \int_{\Omega} d\Omega = -4\pi G m_i \\ m_i \text{ esterna} \rightarrow 0 \end{cases}$$

E per una distribuzione:

$$\Phi = \sum_i \int_{\Omega} \frac{d\Phi_i}{d\Omega} d\Omega = -4\pi G \sum_{i \text{ interne}} m_i$$

Il flusso del campo gravitazionale attraverso una superficie chiusa è proporzionale solo alle masse all'interno della superficie. La costante di proporzionalità è $4\pi G$.

Il Teorema di Gauss per il campo gravitazionale

Se anziché avere un insieme di masse puntiformi abbiamo una distribuzione continua di massa, conviene introdurre il concetto di densità.

Densità media: $\bar{\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta V}$

Densità locale: $\rho(x, y, z) = \frac{dm}{dV} = \frac{d^3 m}{dx dy dz}$

La massa totale è $M = \int_V \frac{dm}{dV} dV = \int_V \rho(x, y, z) dx dy dz$

Il campo è $\vec{g}(\vec{r}) = \int_V G \frac{\rho(x, y, z)}{\| (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) - \vec{r} \|^3} ((x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) - \vec{r}) dx dy dz$

Il flusso è $\Phi = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{interna}$

Applicazioni del teorema di Gauss per il campo gravitazionale

Supponiamo di avere una distribuzione di densità di massa con simmetria sferica.

Anche il campo gravitazionale avrà la stessa simmetria.

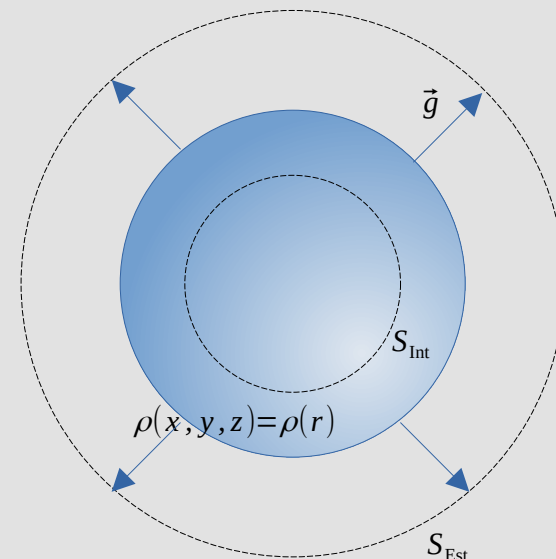
Per calcolare il campo in un punto si dovrebbe usare:

$$\vec{g}(\vec{r}) = \int_V G \frac{\rho(x, y, z)}{\| (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) - \vec{r} \|^3} ((x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) - \vec{r}) dx dy dz$$

Questo integrale non è facilmente calcolabile.

Grazie al teorema di Gauss e alla simmetria sferica invece possiamo osservare che per tutta una superficie posta a distanza r dal centro il campo è sempre ortogonale alla superficie, e quindi parallelo alla normale:

$$\vec{g}(x, y, z) \cdot d\vec{S} = \vec{g}(x, y, z) \cdot \hat{n} dS = -\|\vec{g}(x, y, z)\| dS = -\|\vec{g}\|(r) r^2 d\Omega$$



Applicazioni del teorema di Gauss per il campo gravitazionale

Supponiamo di avere una distribuzione di densità di massa con simmetria sferica.

Quindi per simmetria abbiamo:

$$\vec{g}(x, y, z) \cdot d\vec{S} = \vec{g}(x, y, z) \cdot \hat{n} dS = -\|\vec{g}(x, y, z)\| dS = -\|\vec{g}\|(r) r^2 d\Omega$$

$$\Phi = \int_S \vec{g}(x, y, z) \cdot d\vec{S} = -\int_{\Omega} \|\vec{g}\|(r) r^2 d\Omega = -4\pi r^2 \|\vec{g}\|(r)$$

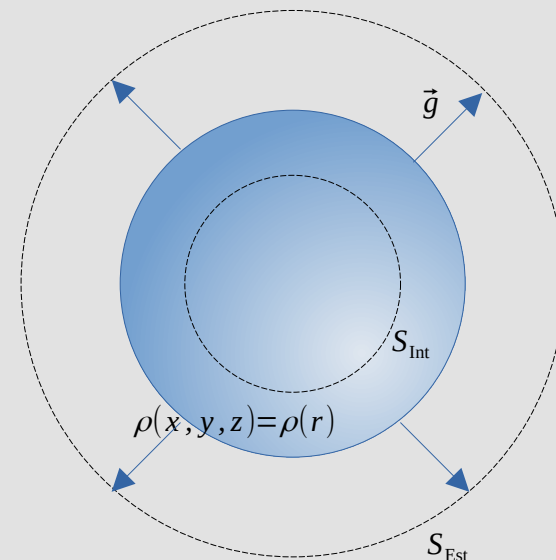
Dal teorema di Gauss:

$$\Phi = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{s} = -4\pi G M_{\text{int}}$$

Dove M_{int} somma solo le masse all'interno della superficie su cui valutiamo il campo.

Dal confronto si ha:

$$-4\pi r^2 \|\vec{g}\|(r) = -4\pi G M_{\text{int}} \Rightarrow \|\vec{g}\|(r) = G \frac{M_{\text{int}}}{r^2}$$

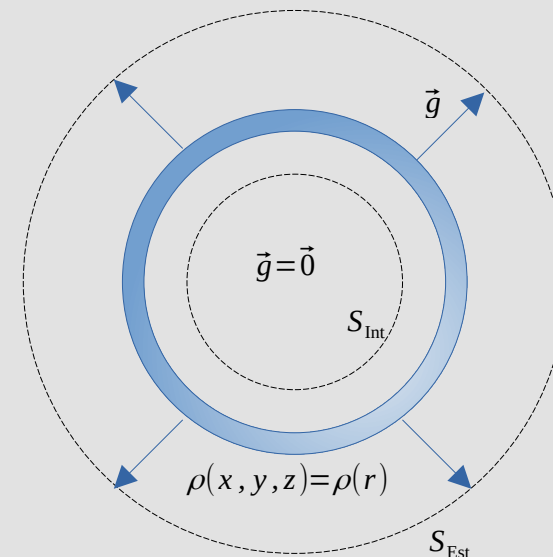


Applicazioni del teorema di Gauss per il campo gravitazionale

Quindi:

$$\vec{g}(\|\vec{r}\|) = -G \frac{M_{\text{int}}}{r^2} \hat{r}$$

- 1) È perfettamente lecito considerare tutte le masse a simmetria sferica concentrate nel loro centro e calcolare da lì il campo e la forza (come nel caso dell'esperienza di Cavendish)
- 2) Per una superficie interna ad una distribuzione sferica il campo deriva solo dalle masse all'interno
- 3) Per una sfera cava, il campo dentro la sfera è identicamente nullo in tutti i punti della cavità
- 4) ...



Applicazioni del teorema di Gauss per il campo gravitazionale

Sappiamo che:

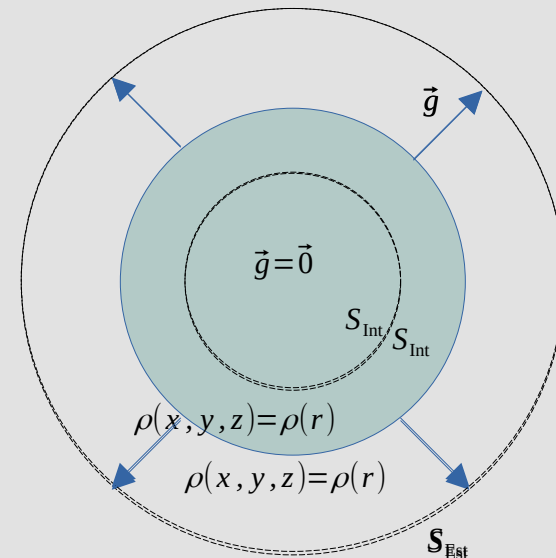
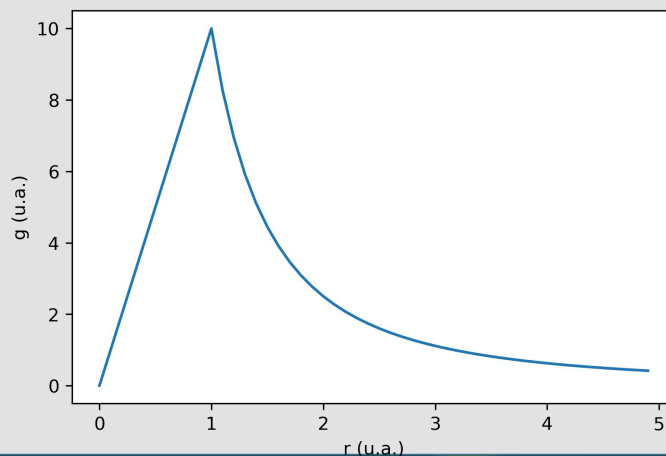
$$\vec{g}(\|\vec{r}\|) = -G \frac{M_{\text{int}}}{r^2} \hat{r}$$

4) Per una sfera di densità costante:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \frac{M_{\text{int}}}{r^2} \hat{r} = -G \frac{4}{3} \pi \rho_{\text{int}} \frac{r^3}{r^2} \hat{r} = -\frac{4}{3} G \pi \rho_{\text{int}} r \hat{r} = -\frac{4}{3} G \pi \rho_{\text{int}} \vec{r}$$

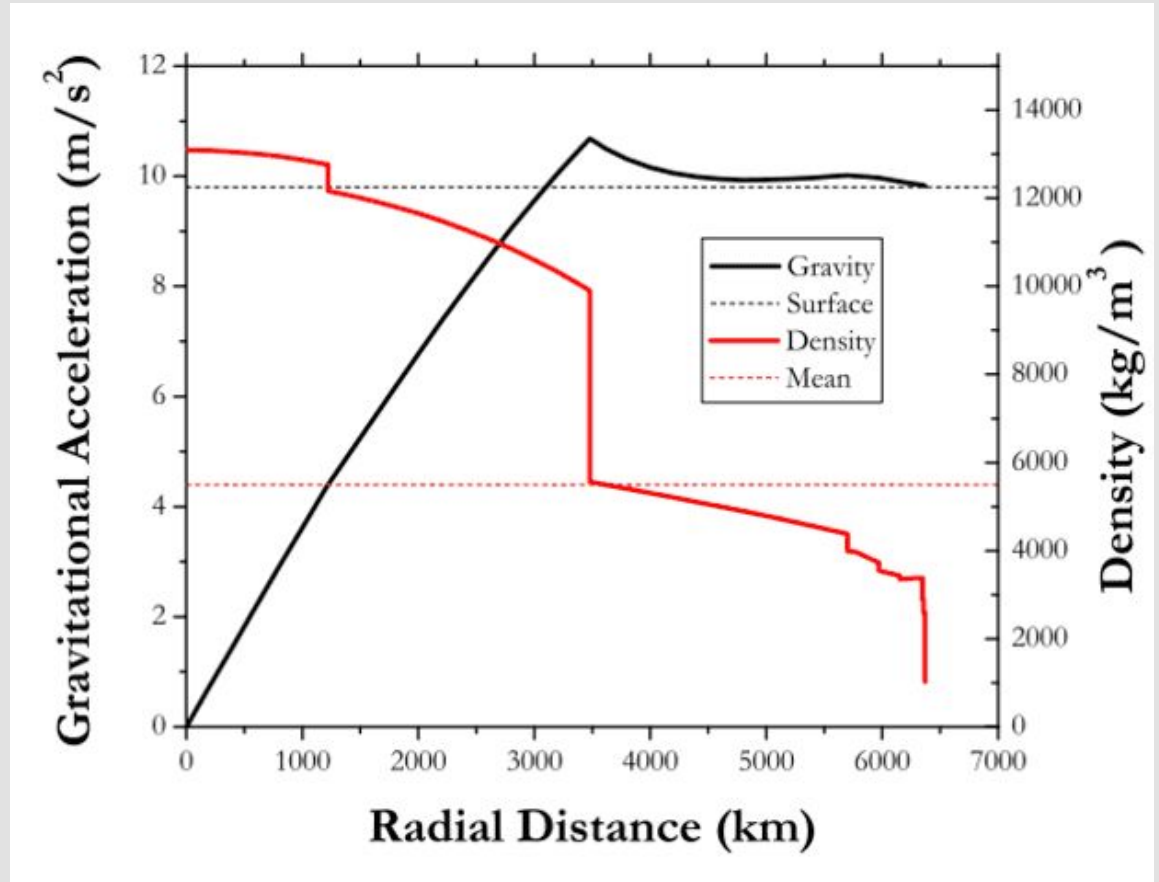
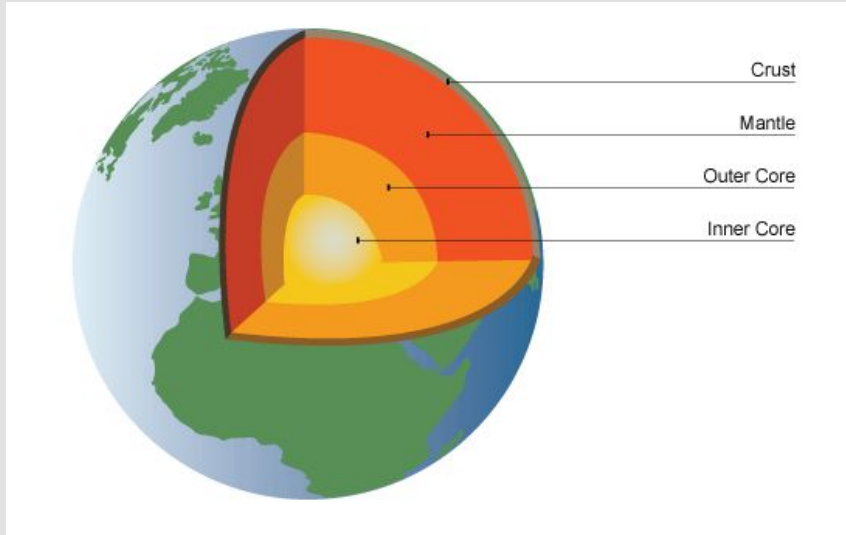
Il campo aumenta linearmente dal centro alla periferia, per poi diminuire

Infatti anche la forza peso diminuisce se si penetra in profondità



Profili di densità e campo gravitazionale terrestri

Modello di densità della Terra



Gravitazione ed energia potenziale

La forza gravitazionale è centrale \rightarrow

- Il momento angolare si conserva
- Il moto è piano
- La forza è conservativa
- Ammette un'energia potenziale

$$\vec{F}_{mM} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{r} \quad \text{ponendo } \vec{r}_M = \vec{0} \quad (\text{ha senso se } M \gg m)$$

$$U_{mM} = -G \frac{mM}{r} + c \quad \text{di solito } c = 0 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} U(r) \rightarrow 0$$

Nel caso in cui si debba considerare il moto di entrambe le masse

$$\vec{F}_{m_2, m_1} = G \frac{m_2 m_1}{r_{21}^2} \hat{r}_{2 \rightarrow 1} = G \frac{m_2 m_1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$U_{m_2, m_1} = -G \frac{m_2 m_1}{r_{21}} + c$$

Gravitazione e il problema dei due corpi

Consideriamo un sistema di sole due masse. Introduciamo il vettore:

$$\vec{r}_R = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

La derivata seconda di questo vettore ha un'interessante proprietà:

$$\vec{a}_R = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_1}{m_1} - \frac{\vec{F}_2}{m_2} = \frac{\vec{F}_1}{m_1} + \frac{\vec{F}_1}{m_2} = \vec{F}_1 \frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2}$$

ponendo $\mu_R = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \rightarrow$ massa ridotta

$$\mu_R \vec{a}_R = \vec{F}_1$$

Quindi il vettore differenza di posizione si muove come un corpo avente massa pari alla massa ridotta e soggetto all'azione della forza reciproca tra le due masse. *Questo è vero per ogni interazione a due corpi!*

$$\mu_R < m_1; \mu_R < m_2; \quad \text{se } m_2 \gg m_1, \mu_R \simeq m_1$$

Gravitazione e il problema dei due corpi

Trattiamo il problema del moto dei due corpi con attrazione gravitazionale in termini di massa ridotta:

$$\mu_R \vec{a}_R = -G \frac{m_1 m_2}{r_R^2} \hat{r}_R$$

Nel caso di moto circolare, si ha:

$$\mu_R \omega^2 r_R = \mu_R \frac{v_R^2}{r_R} = G \frac{m_1 m_2}{r_R^2} \Rightarrow v_R^2 = G \frac{m_1 m_2}{\mu_R r_R} = G \frac{m_1 + m_2}{r_R} \Rightarrow v_R = \sqrt{G \frac{m_1 + m_2}{r_R}}$$

$$\text{se } m_2 \gg m_1, v_1 \simeq v_R \simeq \sqrt{G \frac{m_2}{r_1}}$$

Gravitazione e orbita geostazionaria

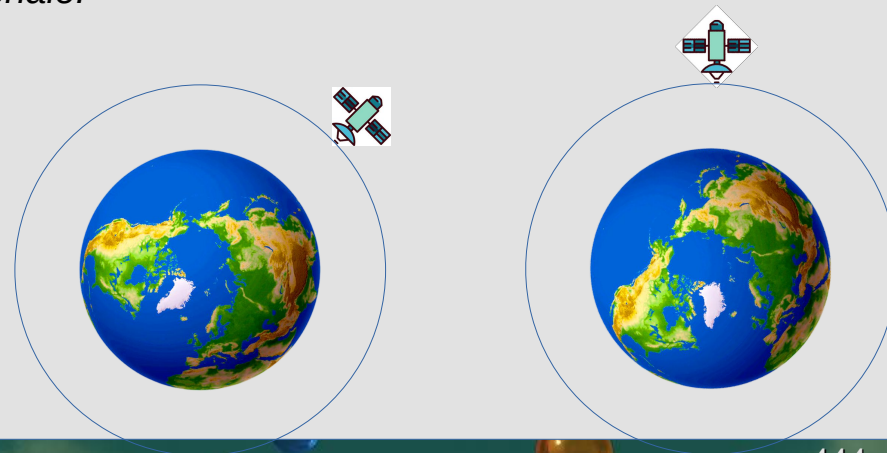
L'orbita geostazionaria è quella il cui periodo coincide con periodo di rotazione della Terra

$$\mu_R \omega^2 r_{geostaz} = \mu_R \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r_{geostaz} = G \frac{mM}{r_{geostaz}^2} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = G \frac{mM}{\mu_R r_{geostaz}^3} \Rightarrow r_{geostaz}^3 \simeq G \frac{MT^2}{4\pi^2}$$

$$r_{geostaz} = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{g r_{Terra}^2 T^2}{4\pi^2}} \simeq 42.2 \times 10^3 \text{ km} \simeq 36000 \text{ km dalla superficie}$$

Attenzione: l'orbita geostazionaria è solo una, ed è per forza equatoriale!

Tutti i satelliti geostazionari devono "dividersi" lo "spazio" disponibile su una sola orbita, che passa obbligatoriamente per l'Equatore!



Gravitazione e problema dei due corpi

Energia potenziale e meccanica nel problema dei due corpi

Attenzione: qui si suppone esplicitamente che la costante dell'energia potenziale sia zero in modo che essa si annulli all'infinito

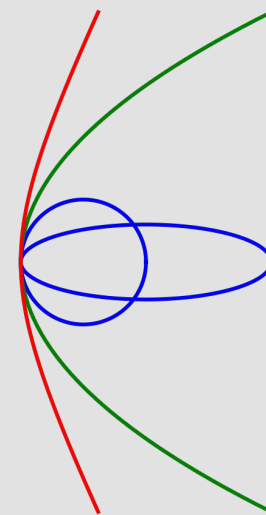
$$K = \frac{1}{2} \mu_R v_R^2; \quad U = -G \frac{m_1 m_2}{r_R}; \quad E = K + U = \frac{1}{2} \mu_R v_R^2 - G \frac{m_1 m_2}{r_R} = \text{cost.}$$

Le due energie possono cambiare, ma la somma è costante per tutto il moto.

$$E > 0 \Rightarrow \lim_{r_R \rightarrow \infty} K + U = \frac{1}{2} \mu_R v_\infty^2 > 0 \Rightarrow \text{traiettoria} = \text{iperbole, stato non legato}$$

$$E = 0 \Rightarrow \lim_{r_R \rightarrow \infty} K + U = \frac{1}{2} \mu_R v_\infty^2 = 0 \Rightarrow \text{traiettoria} = \text{parabola, stato non legato}$$

$$E < 0 \Rightarrow r_{\max} = G \frac{m_1 m_2}{K} \Rightarrow \text{traiettoria} = \text{ellisse (o circonferenza), stato legato}$$



Gravitazione e problema dei due corpi

Velocità di fuga: la velocità minima che un corpo deve avere per sfuggire all'attrazione dell'altro

Per un corpo sulla Terra:

$$K = \frac{1}{2} \mu_R v_R^2; \quad U = -G \frac{m_1 m_2}{r_R}; \quad E = K + U = \frac{1}{2} \mu_R v_R^2 - G \frac{m_1 m_2}{r_R} = 0$$

$$v_{fuga} = \sqrt{2G \frac{m_1 m_2}{\mu_R r_{Terra}}} \simeq \sqrt{2G \frac{M}{r_{Terra}}} = \sqrt{2g r_{Terra}} = 11,2 \text{ km/s}$$

Sulla Luna:

$$v_{fuga} = \sqrt{2G \frac{M_{Luna}}{r_{Luna}}} = 2,4 \text{ km/s}$$

Su Marte:

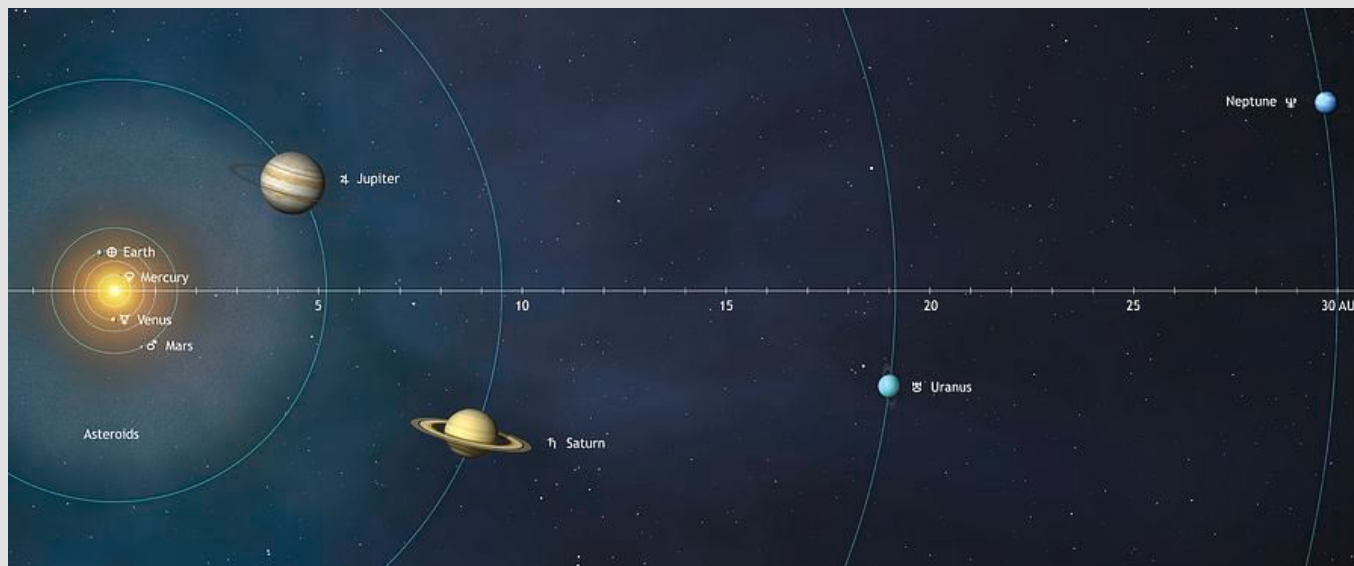
$$v_{fuga} = \sqrt{2G \frac{M_{Marte}}{r_{Marte}}} = 5,0 \text{ km/s}$$

Gravitazione e orbite dei pianeti

Le orbite dei pianeti sono definite dalle Leggi di Keplero, che sono puramente cinematiche.

Possono essere ricavate risolvendo l'equazione del moto con la legge di gravitazione di Newton

Pianeta	Semiassse Maggiore (UA) - "a"	Periodo Orbitale (anni) - "T"	a^3/T^2 ($UA^3 y^{-2}$)
Mercurio	0,39	0,24	1,03
Venere	0,72	0,62	0,97
Terra	1	1	1,00
Marte	1,52	1,88	0,99
Giove	5,2	11,86	1,00
Saturno	9,58	29,46	1,01
Urano	19,22	84,01	1,01
Nettuno	30,05	164,8	1,00



Gravitazione e orbite dei pianeti

Le orbite dei pianeti sono definite dalle Leggi di Keplero, che sono puramente cinematiche.

I legge di Keplero: L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.

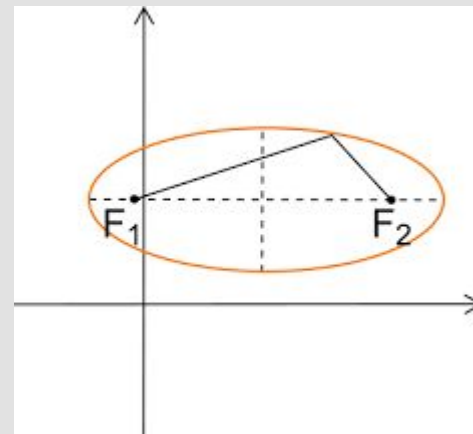
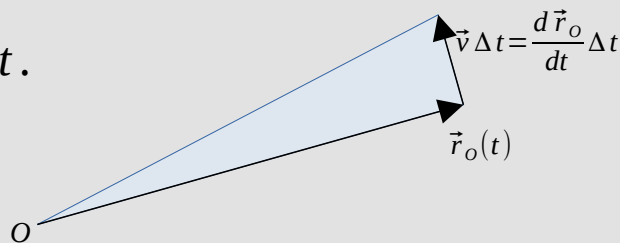
II legge di Keplero: Il raggio vettore che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta spazza (o descrive) aree uguali in tempi uguali.

III legge di Keplero: I quadrati dei periodi orbitali dei pianeti sono proporzionali al cubo del semiasse maggiore.

Osserviamo che, poiché la forza gravitazionale è centrale, si ottiene immediatamente che il moto è piano e che il momento angolare è costante:

$$\vec{J}_O = \text{cost.} \Rightarrow m \vec{r}_O \times \vec{v} = m \frac{\vec{r}_O \times d\vec{r}}{dt} = \text{cost.}$$

Questo dimostra la seconda legge.



Ellisse: luogo geometrico dei punti la cui somma delle distanze da due punti detti fuochi è costante

Gravitazione e orbite dei pianeti

Riguardo alla prima legge, osserviamo che si tratta di moti piani; non ricaveremo la traiettoria in generale, ma abbiamo già visto che le soluzioni del problema dei due corpi sono sezioni coniche (ossia iperboli, parabole, ellissi) e in particolare abbiamo già visto che la traiettoria circolare è ammessa.

Riguardo alla terza legge, possiamo ricavarla facilmente nel caso di orbita circolare:

$$\mu_R \omega_{orbita}^2 r_{orbita} = \mu_R \left(\frac{2\pi}{T_{pianeta}} \right)^2 r_{orbita} = G \frac{m_{pianeta} M_{sole}}{r_{orbita}^2} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T_{orbita}^2} \mu_R = G \frac{m_{pianeta} M_{sole}}{\mu_R r_{orbita}^3}$$

Poiché la massa di ciascun pianeta è molto minore della massa del Sole, la massa ridotta coincide con quella del pianeta e abbiamo:

$$r_{orbita}^3 \simeq G \frac{M_{sole} T_{orbita}^2}{4\pi^2}$$