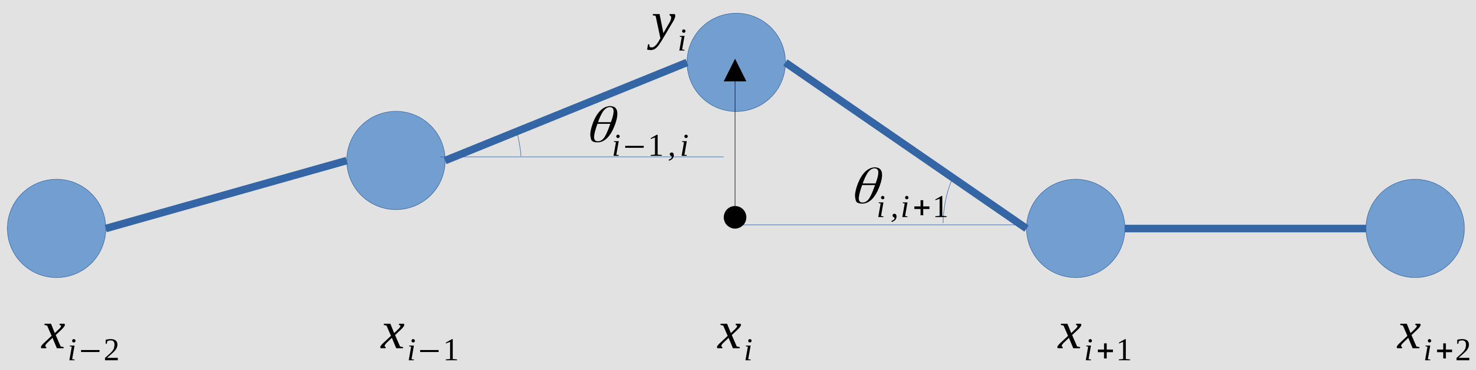
ONDE

Onde meccaniche

Il concetto di onda è legato alla propagazione di una perturbazione in un mezzo. Si parla di onda se la perturbazione ha una velocità e modalità di propagazione ben definite e tali da poter veicolare l'informazione in maniera fedele, ossia con distorsioni minime o prevedibili.

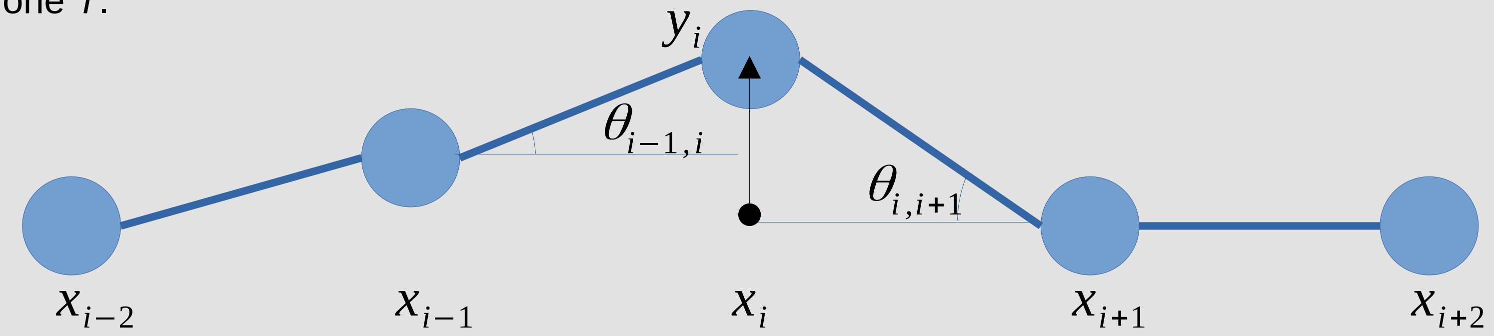
In Fisica si incontrano diversi tipi di onde: vedremo le onde meccaniche e le onde di pressione (acustiche) in questo corso, ma vi sono anche altri tipi di onde, come le onde elettromagnetiche.

Partiamo da una semplice catena di punti materiali che possono muoversi solo lungo *y*, connessi da corde tese.



Onde meccaniche

Supponiamo che i punti materiali abbiano tutti la stessa massa e siano equispaziati a distanza *Δx* e che ogni tratto di corda abbia tensione *T*.



L'equazione della dinamica del singolo punto materiale su *y* si scrive: $m_i \ddot{y}_i = T \sin\theta_{i,i+1} + T \sin\theta_{i-1,i}$

Supponiamo le deviazioni piccole, quindi $\theta \simeq \sin\theta \simeq \tan\theta$

$$\sin\theta_{i,i+1} \simeq \frac{[y_{i+1} - y_i]}{\Delta x} = \frac{[y(x+\Delta x) - y(x)]}{\Delta x} \qquad \sin\theta_{i-1,i} \simeq \frac{[y_{i-1} - y_i]}{\Delta x} = \frac{[y(x-\Delta x) - y(x)]}{\Delta x}$$

Onde meccaniche

Supponiamo i punti materiali siano equispaziati, a distanza Δx e che la corda abbia tensione T.

$$m\ddot{y}_i = T\left[\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}+\frac{y(x-\Delta x)-y(x)}{\Delta x}\right]=T\left[\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}-\frac{y(x)-y(x-\Delta x)}{\Delta x}\right]$$

Possiamo introdurre la densità lineare di massa:

$$m=\mu\Delta x$$

$$\mu\Delta x\,\ddot{y}(x,t)=T\left[\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}-\frac{y(x)-y(x-\Delta x)}{\Delta x}\right]\Rightarrow$$

$$\mu\ddot{y}(x,t)=T\frac{\left[\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}-\frac{y(x)-y(x-\Delta x)}{\Delta x}\right]}{\Delta x}$$

Onde meccaniche

Adesso rendiamo l'intervallo tra i punti materiali sempre più piccolo, fino ad avere infiniti punti

$$\lim_{\Delta x \to 0} \mu \ddot{y}(x,t) = \lim_{\Delta x \to 0} T \frac{\left[\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x} - \frac{y(x)-y(x-\Delta x)}{\Delta x}\right]}{\Delta x} \Rightarrow \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0; \quad poniamo\, v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0}$$

Otteniamo l'**equazione delle onde.** La soluzione generale di quest'equazione è

$$y(x,t) = Y_p(x - vt) + Y_r(x + vt)$$

Onde meccaniche

Le funzioni Y_p e Y_r sono rispettivamente una soluzione **progressiva** e una **regressiva**, corrispondentemente al verso di propagazione.

Le due soluzioni sono *funzioni completamente libere*, con la sola condizione che abbiano derivate seconde spaziali e temporali. In pratica qualsiasi soluzione fisicamente accettabile è possibile.

La corda fatta di infiniti punti materiali e con una certa tensione è in grado di propagare qualunque pacchetto di informazione.

La velocità di propagazione dipende dalla tensione e dalla densità lineare di massa della corda.

In particolare, possiamo considerare le soluzioni:

$$Y_p(x-vt)=A\sin\omega(x/v-t)=A\sin(kx-\omega t);\quad Y_r(x+vt)=A\sin\omega(x/v+t)=A\sin(kx+\omega t)$$

$$k=\frac{2\pi}{L}\text{ vettore d'onda};\ L=\text{lunghezza d'onda}$$

Onde meccaniche

Tutte le combinazioni lineari di onde progressive e regressive sono soluzioni ammissibili.

In particolare consideriamo:

$$y(x,t)=A[\sin(kx-\omega t)+\sin(kx+\omega t)]=$$
$$=A[\sin(kx)\cos(\omega t)-\sin(\omega t)\cos(kx)+\sin(kx)\cos(\omega t)+\sin(\omega t)\cos(kx)]$$

Si ottiene la soluzione di **onde stazionarie**, ossia quelle la cui posizione di nodi (zeri), creste e ventri non varia.

$$\boxed{Y_s(x,t)=2A\sin(kx)\cos(\omega t)}$$

Onde meccaniche

In sintesi:

$$\text{Onda progressiva: } Y_p(x,t) = A\sin\omega(x/v - t)$$

$$\text{Onda regressiva: } Y_r(x,t) = A\sin\omega(x/v + t)$$

$$\text{Onda stazionaria: } Y_s(x,t) = 2A\sin\omega x/v\cos(\omega t)$$

Le onde meccaniche dovute alla tensione di una corda vibrante sono **trasversali**: il vettore spostamento è *ortogonale* all'asse di propagazione.

Se questa fune è ancorata agli estremi, sono ammissibili solo le funzioni che si annullano agli estremi. Quindi il numero d'onda deve essere del tipo :

$$kL = \omega L/v = n\pi, n\in\mathbb{N} \;\Rightarrow\; k = \frac{n\pi}{L}$$

Questi sono i **modi normali di vibrazione**, ossia moti in cui tutte le parti del sistema si muovono di moto oscillatorio con la stessa frequenza.

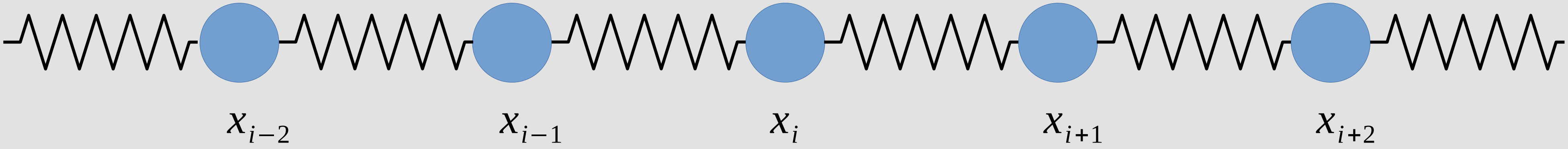
Onde meccaniche

Queste informazioni sono fornite per completezza ma non fanno parte del programma d'esame

Consideriamo un altro sistema meccanico: una serie di punti materiali tutti di massa *m*, connessi da molle tutte uguali di costante elastica *k*, e che possono spostarsi solo sull'asse *x*.

$$x_i: \text{coordinata } x \text{ dell'i-esimo punto in condizione di riposo}$$
$$\xi_i: \text{spostamento } x \text{ dell'i-esimo punto dalla condizione di riposo}$$

$$m\ddot{\xi}_i = k(\xi_{i-1} - \xi_i) + k(\xi_{i+1} - \xi_i) = k[(\xi_{i+1} - \xi_i) - (\xi_i - \xi_{i-1})]$$



Onde meccaniche

Queste informazioni sono fornite per completezza ma non fanno parte del programma d’esame

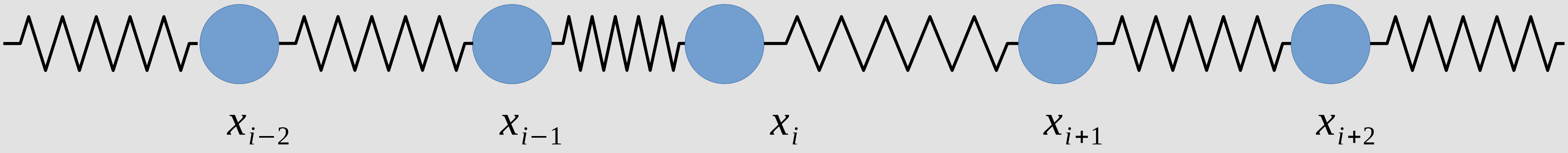
Elaboriamo l’equazione ragionando in termini di densità di massa e di modulo elastico

$$m\ddot{\xi}_i = k[(\xi_{i+1}-\xi_i)-(\xi_i-\xi_{i-1})] \Rightarrow \mu\Delta x\,\ddot{\xi}_i = k[(\xi_{i+1}-\xi_i)-(\xi_i-\xi_{i-1})]$$

$$\mu\ddot{\xi}_i = k\left[\frac{\xi_{i+1}-\xi_i}{\Delta x}-\frac{\xi_i-\xi_{i-1}}{\Delta x}\right]$$

Ricordiamo che la costante elastica *k* è legata al modulo di Young:

$$k=\frac{EA}{L_0}=\frac{EA}{\Delta x}$$



Onde meccaniche

Queste informazioni sono fornite per completezza ma non fanno parte del programma d’esame

Elaboriamo l’equazione ragionando in termini di densità di massa e di modulo elastico

$$\mu \ddot{\xi}_i = k\left[\frac{\xi_{i+1}-\xi_i}{\Delta x} - \frac{\xi_i-\xi_{i-1}}{\Delta x}\right] = E\,A\,\frac{\left[\frac{\xi_{i+1}-\xi_i}{\Delta x} - \frac{\xi_i-\xi_{i-1}}{\Delta x}\right]}{\Delta x}$$

Anche in questo caso possiamo aumentare indefinitamente il numero dei punti materiali accorciando le molle:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \mu \ddot{\xi}_i = E\,A \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[\frac{\xi_{i+1}-\xi_i}{\Delta x} - \frac{\xi_i-\xi_{i-1}}{\Delta x}\right]}{\Delta x} = E\,A\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E\,A\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\,; \quad v = \sqrt{\frac{E\,A}{\mu}}\,; \quad \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0}$$

Onde meccaniche

Queste informazioni sono fornite per completezza ma non fanno parte del programma d'esame

Otteniamo ancora un'equazione delle onde

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}=0$$

La forma matematica delle soluzioni è sempre la stessa.

In questo caso si tratta di onde **longitudinali** poiché lo spostamento è parallelo alla direzione di propagazione dell'onda.

Onde e funzioni sinusoidali

C'è un motivo ben preciso per cui si lavora quasi sempre con funzioni sinusoidali

La matematica ci insegna che una classe molto ampia di funzioni periodiche (in pratica tutte quelle fisicamente praticabili) può essere ottenuta sommando funzioni sinusoidali

In generale, il numero di termini da inserire nella somma (serie) è infinito, ma sono sempre più piccoli, per cui ad un certo punto ci si può fermare

Si ha una **serie di Fourier** per una generica funzione periodica F(t):

$$F(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\right]$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)dt\,; \quad a_n=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos(n\omega t)dt\,; \quad b_n=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin(n\omega t)dt\,;$$

$$T \text{ è il periodo}\,; \quad f=\frac{1}{T} \text{ è la frequenza base}\,; \quad \omega=2\pi f\,; \quad 2f, 3f, 4f \ldots \text{sono le armoniche}$$

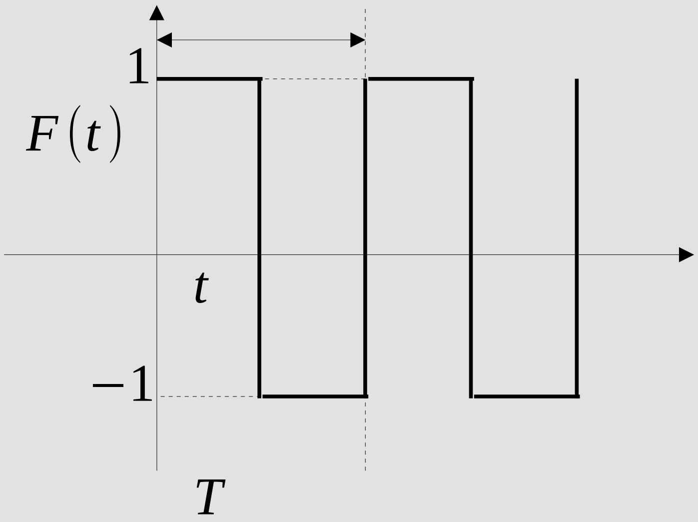
Onde e funzioni sinusoidali

Queste informazioni sono fornite per completezza ma non fanno parte del programma d'esame

La serie riproduce la funzione dov'è regolare

Nei punti di discontinuità dà la media del limite destro e sinistro

Esempio: *onda quadra*



$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\,dt=\frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2}dt-\int_{T/2}^{T}dt\right)=0\,;$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos(n\,\omega t)\,dt=\frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2}\cos(n\,\omega t)\,dt-\int_{T/2}^{T}\cos(n\,\omega t)\,dt\right)$$

$$a_n=\frac{2}{T}\frac{1}{n\,\omega}\left(\left[\sin(n\,\omega t)\right]_0^{T/2}-\left[\sin(n\,\omega t)\right]_{T/2}^{T}\right)=0\,;$$

$$b_n=\frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2}\sin(n\,\omega t)\,dt-\int_{T/2}^{T}\sin(n\,\omega t)\,dt\right)=$$

$$=\frac{2}{n\,\omega T}\left(\left[-\cos(n\,\omega t)\right]_0^{T/2}+\left[\cos(n\,\omega t)\right]_{T/2}^{T}\right)$$

$$b_n=\frac{1}{n\,\pi}\left(\left(\cos 0-\cos(n\,\pi)\right)+\left(\cos(2\,n\,\pi)-\cos(n\,\pi)\right)\right)$$

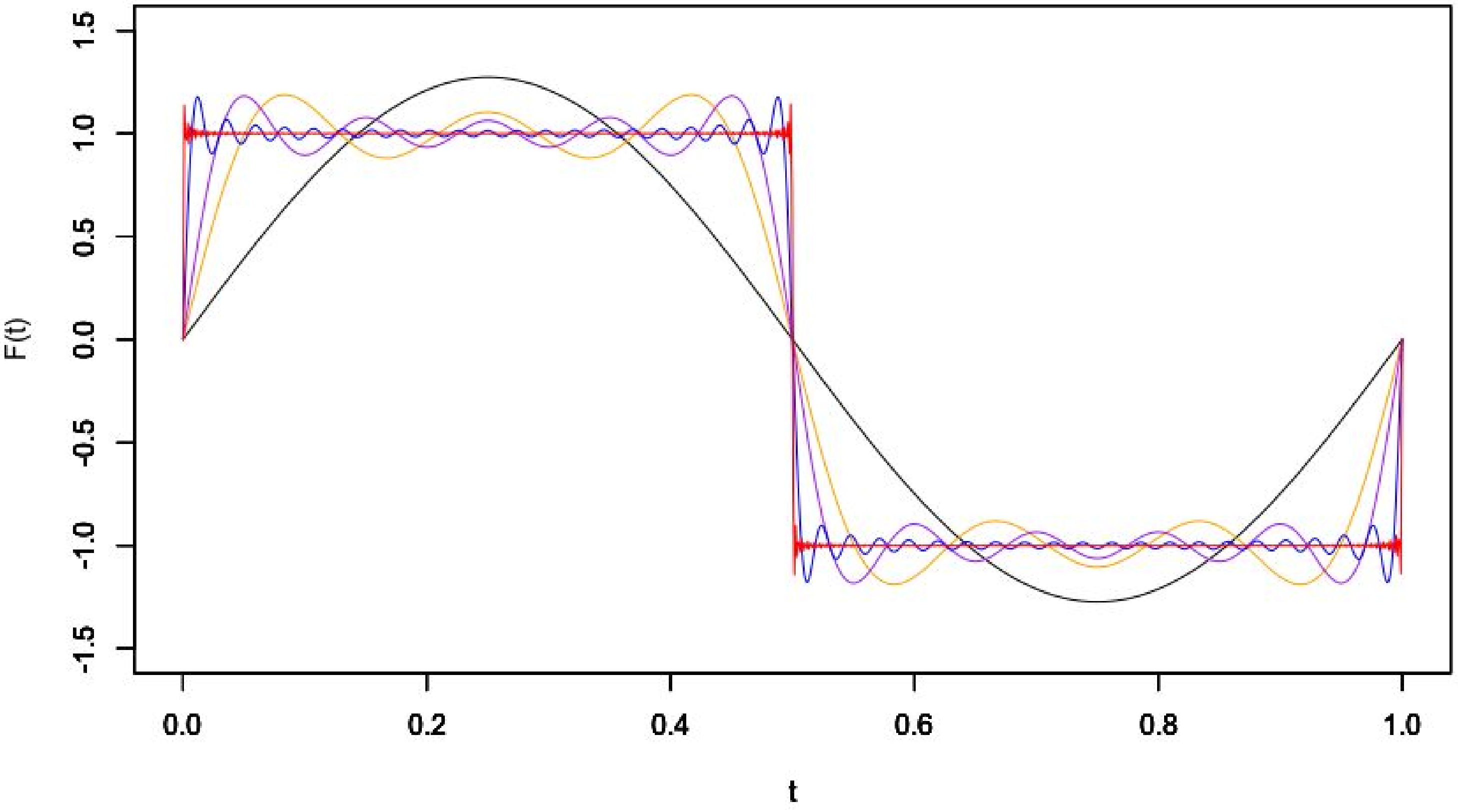
$$b_n=\frac{2}{n\,\pi}\left[1-(-1)^n\right];\qquad b_{2k}=0\,;\ \ b_{2k-1}=\frac{4}{(2\,k-1)\,\pi}$$

Onde e funzioni sinusoidali

Queste informazioni sono fornite per completezza ma non fanno parte del programma d'esame

Esempio: onda quadra

- Base (f)
- f, 3f, 5f
- f, 3f, 5f, 7f, 9f
- f, 3f, …, 39f, 41f
- f, 3f, …, 399f, 401f



Onde e funzioni sinusoidali

Queste informazioni sono fornite per completezza ma non fanno parte del programma d'esame

Profili d'onda notevoli

- Sinusoidale
- Quadra
- Triangolare
- Dente di sega (rampa crescente)