ALGEBRA 1

Aprile 2018

Esercizio 1. Nel gruppo $G = GL(2, \mathbb{Z}_5)$ si consideri il sottoinsieme

$$H = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_5, a \neq 0\}.$$

- (i) Si provi che H è un sottogruppo di G, se ne determini l'ordine e si studi se H è abeliano.
- (ii) Posto $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, si determinino il periodo di x, y, z e si scrivano gli elementi di $L = \langle x \rangle, M = \langle y \rangle, N = \langle z \rangle$.
- (iii) Si provi che L è normale in H, si determini l'ordine del gruppo quoziente H/L e se ne studi la struttura.
- (iv) Posta
$$\varphi : \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} L \in H/L \longmapsto a \in \mathbb{Z}_5^*$$
si provi che φ è un epimorfismo di H/L in $\mathbb{Z}_5^*(\cdot)$, e se ne determini il nucleo.

Esercizio 2. Si consideri l'anello $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}(+, \cdot)$.

- (i) Si precisino la cardinalità e la caratteristica di A. Si determinino gli elementi invertibili in A, si dica se esistono in A divisori dello zero e se A è un campo.
- (ii) Considerate le applicazioni $\alpha : (a, b) \in A \longmapsto 3a + b \in \mathbb{Q}$ e $\beta : c \in \mathbb{Q} \longmapsto (0, 4c) \in A$, si calcolino le composte $\alpha \circ \beta$ e $\beta \circ \alpha$, e si studi se $\alpha, \beta, \alpha \circ \beta, \beta \circ \alpha$ sono iniettive o suriettive.
- (iii) Si provi per induzione su n che, per ogni $n \geq 1$,
$$(2, 0) + (4, 0) + \cdots + (2n, 0) = (n^2 + n, 0).$$
- (iii) Considerati i sottoinsiemi $V = \{(a, a) \in A | \ a \in \mathbb{Z}\}, T = \{(0, a) \in A | \ a \in \mathbb{Z}\}, T = \{(0, a) \in A \mid a \in \mathbb{Q}\}$ si studi se V, T, W sono sottoanelli di A. Si studi se V, W sono ideali sinistri o destri di A.
- (iv) Posto $\psi : (a, b) + W \in A/W \longmapsto 9a \in \mathbb{Z}$ si studi se ψ è ben posta, se è iniettiva o suriettiva, se è un omomorfismo di anelli tra A e l'anello $\mathbb{Z}$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ si considerino i sottoinsiemi

$$V = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{N}\}\ , \quad W = \{(x, y, 2x + 3y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

- (i) Si studi se V, W sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$, se ne determini eventualmente la dimensione e due basi.
- (ii)Posto $\varphi \ : \ (a, b, c) + W \ \in \mathbb{R}^3/W \ \longmapsto c - 3b - 2a \in \mathbb{R}$, si studi se φ è ben posta, se è un omomorfismo di spazi vettoriali, se ne determinino il nucleo, l'immagine, le rispettive dimensioni e si dica se φ è iniettiva o suriettiva.