ALGEBRA I

Novembre 2014

1. Nel gruppo $G = GL(2,\mathbb{C})$ delle matrici due per due invertibili sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi si consideri la parte

$$H = \{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}.$$

(i) Si provi che H è un sottogruppo abeliano di G, se ne determini la cardinalità, e si studi se H è normale in G.

(ii) Posto

$$X = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

si determinino il periodo di X e di Y e si scrivano gli elementi di $N = \langle X \rangle$ e di $M = \langle Y \rangle$.

(iii) Si studi se N è normale in H.

(iv) Posta

$$\varphi : \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} N \in H/N \longmapsto xy \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

si provi che φ è un'applicazione ben posta, che è un epimorfismo di H/N in $\mathbb{C} \setminus \{0\}(\cdot)$, e si determini il nucleo di φ.

2. Si consideri l'anello prodotto $A = \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_5$.

(i) Si determinino l'ordine di A, la sua caratteristica, il sottoanello fondamentale E, i divisori dello zero in A, e si dica se E è un campo.

(ii) Posto $a = (\overline{5}, \overline{2}) \in A$ si determinino il sottogruppo generato da a in $A(+)$, l'ideale K generato da a in $A(+,\cdot)$ e si studi l'anello quoziente A/K.

(iii) Posto infine

$$f : (x, y) \in A \longmapsto (3x, 2y) \in A$$

e

$$g : (x, y) \in A \longmapsto 4x \in \mathbb{Z}_{10}$$

si stabilisca se f, g sono iniettive, suriettive, omomorfismi di anelli.

3. Sia W la parte dello spazio vettoriale K^3 definita ponendo

$$W = \{(x, y, z) \in K^3 \mid z = 2x - y\}.$$

Si provi che W è un sottospazio di K^3, se ne determini la dimensione e si scrivano due sue basi.

Posto

$$\varphi \ : \ (x, y, z) + W \ \in K^3/W \ \longmapsto \ y - 2x + z \in K,$$

si studi se φ è ben posta e se è un omomorfismo di spazi vettoriali.

In caso affermativo, si determinino il nucleo di φ e la sua dimensione. Si studi se φ è un K-monomorfismo o un K-epimorfismo di spazi vettoriali.