

ALGEBRA 1

Settembre 2017

Esercizio 1. Nel gruppo $G = GL(2, \mathbb{Z}_7)$ si consideri il sottoinsieme

$$H = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{Z}_7, \det X = ad \neq 0 \right\}.$$

(i) Si provi che H è un sottogruppo di G , se ne determini l'ordine e si studi se H è abeliano.

(ii) Posto $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, si determinino il periodo di X , di Y e di XY in H .

(iii) Posti

$$S = \{X \in H \mid \det X \in \{1, 2, 4\}\}, T = \{X \in H \mid \det X \in \{1, 2\}\},$$

si studi se S, T sono sottogruppi di H e, in tal caso, se sono normali in H .

(iv) Posta

$$\varphi : X \in H \mapsto (\det X)^3 \in \mathbb{Z}_7^*,$$

si studi se φ è iniettiva o suriettiva e se è un omomorfismo di H in $\mathbb{Z}_7^*(\cdot)$, e se ne determini il nucleo.

(v) Si provi che $H/S \simeq \mathbb{Z}_2(+)$ e si determini l'ordine di S .

Esercizio 2. Si consideri l'anello prodotto $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$.

(i) Si precisino la cardinalità e la caratteristica di A . Si determinino gli elementi invertibili e i divisori dello zero in A , si dica se A è un campo.

(ii) Considerati i sottoinsiemi $V = \{(a, a) \in A \mid a \in \mathbb{Z}\}, W = \{(a, 0) \in A \mid a \in \mathbb{Z}\}$, si studi se V, W sono sottoanelli di A , se sono unitari e in tal caso se ne determini la caratteristica. Si studi se V, W sono ideali sinistri o destri di A .

(iii) Poste

$$\psi : (a, b) + W \in A/W \mapsto 5a \in \mathbb{Z}, \omega : (a, b) + W \in A/W \mapsto 5b \in \mathbb{Q}$$

si studi se ψ, ω sono ben poste, iniettive o suriettive, se sono un omomorfismi di anelli.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale reale \mathbb{R}^4 si considerino i sottoinsiemi

$$V = \{(x, y, z, t) \mid x, y, z, t \in \mathbb{Z}\}, W = \{(x, y, 2x + 5y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

(i) Si studi se V, W sono sottospazi di \mathbb{R}^4 , se ne determini eventualmente la dimensione e due basi.

(ii) Posto $\varphi : (a, b, c, d) + W \in \mathbb{R}^4/W \mapsto (2a + 5b - c, d) \in \mathbb{R}^2$, si studi se φ è ben posta, se è un omomorfismo di spazi vettoriali, se ne determinino il nucleo, l'immagine, le rispettive dimensioni e si dica se φ è iniettiva o suriettiva.