ALGEBRA 1

Settembre 2017

Esercizio 1. Nel gruppo $G = GL(2, \mathbb{Z}_7)$ si consideri il sottoinsieme

$$H = \{X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{Z}_7, detX = ad \neq 0\}.$$

(*i*) Si provi che H è un sottogruppo di G, se ne determini l'ordine e si studi se H è abeliano.

(*ii*) Posto $X = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{smallmatrix}\right), Y = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{smallmatrix}\right)$, si determinino il periodo di X, di Y e di XY in H.

(*iii*) Si provi per induzione che $X^{-1}(XY)^n X = (XY)^{-n}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(*iv*) Posti

$$S = \{X \in H \mid detX \in \{1, 2, 4\}\}, \; T = \{X \in H \mid detX \in \{1, 2\}\},$$

si studi se S, T sono sottogruppi di H e, in tal caso, se sono normali in H.

(*v*) Posta $\varphi : X \in H \longmapsto (detX)^3 \in \mathbb{Z}_7^*$, si studi se φ è iniettiva o suriettiva e se è un omomorfismo di H in $\mathbb{Z}_7^*(\cdot)$, e se ne determini il nucleo. Si deduca che $H/S \simeq \mathbb{Z}_2(+)$ e si determini l'ordine di S.

Esercizio 2. Si consideri l'anello prodotto $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$.

(*i*) Si precisino la cardinalità e la caratteristica di A. Si determinino gli elementi invertibili e i divisori dello zero in A, si dica se A è un campo.

(*ii*) Considerate le applicazioni $\alpha : (a, b) \in A \longmapsto a + b \in \mathbb{Q}$ e $\beta : c \in \mathbb{Q} \longmapsto (0, c) \in A$, si calcolino le composte $\alpha \circ \beta$ e $\beta \circ \alpha$, e si studi se $\alpha, \beta, \alpha \circ \beta, \beta \circ \alpha$ sono iniettive o suriettive.

(*iii*) Considerati i sottoinsiemi $V = \{(a, a) \in A | \; a \in \mathbb{Z}\}, W = \{(a, 0) \in A \mid a \in \mathbb{Z}\}$, si studi se V, W sono sottoanelli di A, se sono unitari e in tal caso se ne determini la caratteristica. Si studi se V, W sono ideali sinistri o destri di A.

(*iv*) Posto $\psi : (a, b) + W \in A/W \longmapsto 5a \in \mathbb{Z}, \omega : (a, b) + W \in A/W \longmapsto 5b \in \mathbb{Q}$ si studi se ψ, ω sono ben poste, se sono iniettive o suriettive, se sono omomorfismi di anelli.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottoinsiemi

$$V = \{(x, y, z, t) \mid x, y, z, t \in \mathbb{Z}\} \;, \quad W = \{(x, y, 2x + 5y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

(*i*) Si studi se V, W sono sottospazi di $\mathbb{R}^4$, se ne determini eventualmente la dimensione e due basi.

- (*ii*)Posto $\varphi \; : \; (a, b, c, d) + W \; \in \mathbb{R}^4/W \; \longmapsto (2a + 5b - c, d) \in \mathbb{R}^2$, si studi se φ è ben posta, se è un omomorfismo di spazi vettoriali, se ne determinino il nucleo, l'immagine, le rispettive dimensioni e si dica se φ è iniettiva o suriettiva.