

ALGEBRA 1

Settembre 2016

Esercizio 1. Nel gruppo $G = GL(2, \mathbb{Z}_7)$ si consideri il sottoinsieme

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_7, a \neq 0 \right\}.$$

- (i) Si provi che H è un sottogruppo di G , se ne determini l'ordine e si studi se H è abeliano.
- (ii) Posto $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, si determinino il periodo di x, y, z e si scrivano gli elementi di $L = \langle x \rangle, M = \langle y \rangle, N = \langle z \rangle$.
- (iii) Si provi che L è normale in H , si determini l'ordine del gruppo quoziente H/L e se ne studi la struttura.
- (iv) Posta

$$\varphi : \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \in H \mapsto a \in \mathbb{Z}_7^*$$

si provi che φ è un epimorfismo di $H/$ in $\mathbb{Z}_7^*(\cdot)$, e se ne determini il nucleo.

- (v) Posto $I = \{s \in H \mid s^2 = 1\}$, si determini l'ordine di I e si studi se I un sottogruppo di H .

Esercizio 2. Si consideri l'anello $A = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18} (+, \cdot)$.

- (i) Si precisino la cardinalità e la caratteristica di A . Si determinino gli elementi invertibili in A , si dica se esistono in A divisori dello zero e se A è un campo.
- (ii) Considerati i sottoinsiemi $V = \{(\bar{a}, \bar{a}) \in A \mid a \in \mathbb{Z}\}, W = \{(\bar{0}, \bar{a}) \in A \mid a \in \mathbb{Z}\}$, si studi se V, W sono sottoanelli di A , se sono unitari e in tal caso se ne determini la caratteristica. Si studi se V, W sono ideali sinistri o destri di A .
- (iii) Posto

$$\psi : (\bar{a}, \bar{b}) + W \in A/W \mapsto \bar{9a} \in \mathbb{Z}_{18}$$

si studi se ψ è ben posta, se è iniettiva o suriettiva, se è un omomorfismo di anelli tra A e l'anello \mathbb{Z}_{18} .

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale reale \mathbb{R}^3 si considerino i sottoinsiemi

$$V = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{N}\}, \quad W = \{(x, y, x + y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

- (i) Si studi se V, W sono sottospazi di \mathbb{R}^3 , se ne determini eventualmente la dimensione e due basi.
- (ii) Posto $\varphi : (a, b, c) + W \in \mathbb{R}^3/W \mapsto c - b - a \in \mathbb{R}$, si studi se φ è ben posta, se è un omomorfismo di spazi vettoriali, se ne determinino il nucleo, l'immagine, le rispettive dimensioni e si dica se φ è iniettiva o suriettiva.