ALGEBRA I

Luglio 2015

1. Nel gruppo $G = GL(2, \mathbb{Z}_9)$ delle matrici due per due invertibili su $\mathbb{Z}_9$ si consideri il sottoinsieme

$$H = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}_9^\star \ , \ b \in \mathbb{Z}_9\}.$$

(i) Si provi che H è un sottogruppo di G, se ne determini la cardinalità e si studi se H è abeliano.
(ii) Considerati gli elementi di H: $x = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), y = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), z = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, si determinino gli ordini di x, y, z.
(iii) Posti $N = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{smallmatrix}\right) \mid a \in \mathbb{Z}_9^\star\}, M = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid b \in \mathbb{Z}_9\}$, si studi se M, N sono sottogruppi di H e se sono normali in H.
(iv) Si provi che il gruppo quoziente H/M è abeliano e se ne determini l'ordine e la struttura.
(v) Posto infine $\varphi : \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & a \end{smallmatrix}\right)M \in H/M \longmapsto a \in \mathbb{Z}_9^\star$ si provi che essa è un'applicazione ben posta e si studi se è un isomorfismo tra i gruppi H/M e $\mathbb{Z}_9^\star(\cdot)$.

2. Sia $(A, +, \cdot)$ l'anello prodotto $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$.
(i) Si precisino la caratteristica, la cardinalità e il sottoanello fondamentale di A.
(ii) Si individuino gli elementi invertibili ed i divisori dello zero in A e si precisi se A è un campo.
(iii) Si studi se l'applicazione: $\psi : ([a]_6, [b]_6) \in A \longmapsto [a + b]_6 \in \mathbb{Z}_9^\star$ è un omomorfismo di anelli tra A e $\mathbb{Z}_6$, se ne determini il nucleo e si studi se essa è suriettiva.
(iv) Posto $W = \{([a]_6, [a]_6) \mid a \in \mathbb{Z}\}$, $T = \{([0]_6, [2a]_6) \mid a \in \mathbb{Z}\}$, si studi se W, T sono sottoanelli unitari di A e, in caso affermativo, se ne determinino l'unità e la caratteristica. Si studi se W, T sono ideali bilateri di A e, in caso affermativo, si individui la cardinalità del relativo anello quoziente.

3. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{Q}^5$ sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.
(i) Per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{Q}^5$ si stabilisca se si tratta di un sottospazio, ed in caso affermativo se ne determini la dimensione ed una base

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 = 1, x_2 + x_4 = x_5\}, W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_2 = 0, x_3 - x_4 = x_5\}.$$

(ii) Posto $\varphi \ : \ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) + W \ \in \mathbb{Q}^5/W \ \longmapsto (x_2, x_2 + x_3 - x_4 - x_5) \in \mathbb{Q}^2$, si studi se φ è ben posta e se è un omomorfismo di spazi vettoriali. In caso affermativo, si determinino il nucleo di φ e la sua dimensione. Si studi infine se φ è iniettiva o suriettiva.