ALGEBRA 1: Febbraio 2018- 2 appello - II traccia

Esercizio 1. Nel gruppo $G = GL(2, \mathbb{Z}_{11})$, si considerino i sottoinsiemi

$$H = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_{11}, a, c \neq 0\}, \quad N = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Z}_{11}\}.$$

(i) Si provi che H, N sono sottogruppi di G, se ne determini l'ordine, e si studi se essi sono abeliani.

(ii) Si provi che N è un sottogruppo normale di H, si determini l'ordine del gruppo quoziente H/N e si studi se esso è abeliano.

(iii) Posto $x = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 10 \end{smallmatrix}\right)$, $y = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, si determinino gli ordini di x, y in H e di xN, yN nel gruppo quoziente H/N .

(iii) Posto

$$\varphi : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} N \in H/N \longmapsto c \in \mathbb{Z}_{11}^{\star},$$

si provi che φ è ben posta, che è un omomorfismo del gruppo H/N nel gruppo $\mathbb{Z}_{11}^{\star}(\cdot)$, se ne determini il nucleo, e si dica se φ è iniettiva o suriettiva.

Esercizio 2. Si consideri l'anello prodotto $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$.

(i) Si provi che A è un anello commutativo e unitario e se ne determinino la cardinalità e la caratteristica. Si descriva l'insieme D dei divisori dello zero di A e l'insieme U degli elementi invertibili di A.

(ii) Posto $f : x \in \mathbb{Z} \longmapsto (x, \frac{x}{7}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}, g : (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \longmapsto x + y \in \mathbb{Q}$, si calcoli la composta $g \circ f$ e si studi se $f, g, g \circ f$ sono iniettive o suriettive.

(iii) Posti $S = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$, $T = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{Q}\}$, si studi se S, T sono sottoanelli o ideali di A.

(iv) Posto $\varphi : (a, b) + T \in A/T \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{Z})$ si studi se φ è ben posta, se è iniettiva o suriettiva e se è un omomorfismo tra l'anello A/T e l'anello $M_2(\mathbb{Z})$ delle matrici 2×2 su $\mathbb{Z}$.

(v) Si provi per induzione che $2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{(n+1)} - 2$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottoinsiemi

$$H = \{(0, a, b, a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \quad K = \{(0, b, -a, a + b + 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

(i) Si studi se H, K sono sottospazi di $\mathbb{R}^4$, se ne determinino eventualmente la dimensione e una base.

(ii) Posto

$$\varphi \;:\; (x, y, z, t) + H \in \mathbb{R}^4/H \longmapsto (x, y + z - t) \in \mathbb{R}^2$$

si studi se φ è ben posta e se è un omomorfismo di spazi vettoriali. Se ne determini il nucleo, l'immagine, le rispettive dimensioni e si dica se φ è iniettiva o suriettiva.