

ALGEBRA 1: Febbraio 2018 - I traccia

Esercizio 1. Nel gruppo $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}, a, c \neq 0 \right\}$, con il prodotto righe per colonne, si considerino i sottoinsiemi:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & u \end{pmatrix} \mid u, v \in \mathbb{Q}, u \neq 0 \right\}, \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

- (i) Si provi che K, B sono sottogruppi normali di G e si studi se essi sono abeliani.
- (ii) Posto $x = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, si determinino gli ordini di x, y, xy in G e nel gruppo quoziente G/B .
- (iii) Posto

$$\varphi : \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & u \end{pmatrix} B \in K/B \longmapsto u \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},$$

si provi che φ è ben posta, che è un omomorfismo del gruppo K/B nel gruppo $\mathbb{Q} \setminus \{0\}(\cdot)$, se ne determini il nucleo, e si dica se φ è iniettiva o suriettiva.

Esercizio 2. Si consideri l'anello prodotto $A = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{21}(+, \cdot)$.

- (i) Si provi che A è un anello commutativo e unitario e se ne determinino la cardinalità e la caratteristica. Si scrivano i divisori dello zero di A , e si dica se A è un campo.
- (ii) Posti $S = \{(3a, 3b) \mid a \in \mathbb{Z}_{12}, b \in \mathbb{Z}_{21}\}$, $T = \{(c, 0) \mid c \in \mathbb{Z}_{12}\}$ si provi studi se S, T sono sottoanelli o ideali bilateri di A .
- (iii) Posto

$$\varphi : (a, b) + T \in A/T \longmapsto 7b \in \mathbb{Z}_{21}$$

si studi se φ è ben posta, se è iniettiva o suriettiva e se è un omomorfismo di anelli.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale reale \mathbb{R}^4 si considerino i sottoinsiemi

$$H = \{(a, b, -a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \quad K = \{(a, b, -a, b+1) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

- (i) Si studi se H, K sono sottospazi di \mathbb{R}^4 , se ne determinino eventualmente la dimensione e una base.
- (ii) Posto

$$\varphi : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \longmapsto (x + 2y, z + t) \in \mathbb{R}^2$$

si studi se φ è un omomorfismo di spazi vettoriali. Se ne determini il nucleo, l'immagine, le rispettive dimensioni e si dica se φ è iniettiva o suriettiva.