

ALGEBRA 1: Aprile 2017

Esercizio 1. Nel gruppo $GL(2, \mathbb{R})$ delle matrici 2×2 invertibili su \mathbb{R} , si consideri il sottoinsieme

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0) \right\}.$$

(i) Si provi che G è un sottogruppo di $GL(2, \mathbb{R})$, si studi se esso è abeliano e se ne determini la cardinalità.

(ii) Utilizzando il principio d'induzione si provi che

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}^{4n} = \begin{pmatrix} 5^{4n} & 0 \\ 0 & 5^{4n} \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Si determini il periodo dell'elemento $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$, si scrivano gli elementi del sottogruppo $H = \langle \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \rangle$ e si provi che H è normale in G .

(iv) Posto

$$\varphi : \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in G \mapsto a^2 + b^2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

si provi che φ è un omomorfismo del gruppo G nel gruppo $\mathbb{R} \setminus \{0\}(\cdot)$. Se ne determini il nucleo, e si dica se φ è iniettiva o suriettiva.

Esercizio 2. Si consideri l'anello prodotto $A = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}(+, \cdot)$.

(i) Si provi che A è un anello commutativo e unitario e se ne determinino la cardinalità e la caratteristica.

(ii) Si scrivano gli elementi invertibili di A e i suoi divisori dello zero, e si dica se A è un campo.

(iii) Posto $S = \{(r, s) \in A \mid r, s \in \mathbb{Z}\}$, $T = \{(a, b) \in A \mid (a, b) \text{ divisore dello zero in } A\} \cup \{(0, 0)\}$, $V = \{(a, b) \in A \mid (a, b) \text{ invertibile in } A\} \cup \{(0, 0)\}$, si studi se essi sono sottoanelli o ideali di A e, in caso affermativo, se sono domini d'integrità o campi.

(iv) Posto

$$\varphi : (a, b) \in A \mapsto a + b \in \mathbb{R} \quad \psi : (a, b) \in A \mapsto 3ab \in \mathbb{R},$$

si studi se φ, ψ sono iniettive o suriettive e se sono omomorfismi di anelli.

Esercizio 3. Sia K un campo e si strutturi K^3 come K -spazio vettoriale nel modo usuale. Sia

$$H = \{(a, b, c) \in K^3 \mid 2a + 3b - c = 0\} \quad \text{e} \quad W = \{(a, b, c) \in K^3 \mid a + b + c = 3\},$$

(i) Si studi se H, W sono sottospazi di K^3 e in tal caso se ne determinino la dimensione e due basi distinguendo i casi: (a) $K = \mathbb{Q}$, (b) $K = \mathbb{Z}_3$, (c) $K = \mathbb{Z}_2$.

(ii) Posto

$$\varphi : (a, b, c) \in K^3/H \mapsto 4a + 6b - 2c \in K,$$

si studi se φ è ben posta e se è un omomorfismo di spazi vettoriali. Si determini il nucleo, l'immagine, le rispettive dimensioni e si dica se φ è iniettiva o suriettiva distinguendo i casi: (a) $K = \mathbb{Q}$, (b) $K = \mathbb{Z}_3$, (c) $K = \mathbb{Z}_2$.