

## ALGEBRA 1: Febbraio 2017, II appello

**Esercizio 1.** Nel gruppo  $GL(2, \mathbb{Q})$  delle matrici  $2 \times 2$  invertibili su  $\mathbb{Q}$ , si consideri il sottoinsieme

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 2^i x & (2^i - 1)x \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(i) Si provi che  $G$  è un sottogruppo di  $GL(2, \mathbb{Q})$  e si studi se esso è abeliano.

(ii) Si dimostri, utilizzando il principio d'induzione, che

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(iii) Si determini il periodo dell'elemento  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , si scrivano gli elementi del sottogruppo  $H = \langle \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$  e si provi che  $H$  è normale in  $G$ .

(iv) Posto

$$\varphi : \begin{pmatrix} 2^i x & (2^i - 1)x \\ 0 & x \end{pmatrix} H \in G/H \mapsto x^2 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},$$

si provi che  $\varphi$  è un'applicazione ben posta e un omomorfismo del gruppo  $G/H$  nel gruppo  $\mathbb{Q} \setminus \{0\}(\cdot)$ . Se ne determini il nucleo, e si dica se  $\varphi$  è iniettiva o suriettiva.

**Esercizio 2.** Si consideri l'anello prodotto  $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}(+, \cdot)$ .

(i) Si provi che  $A$  è un anello commutativo e unitario e se ne determinino la cardinalità e la caratteristica.

(ii) Si scrivano gli elementi invertibili di  $A$  e i suoi divisori dello zero, e si dica se  $A$  è un campo.

(iii) Posti  $S = \{(a, 0) \in A \mid a \in \mathbb{Z}\}$ ,  $T = \{(a, b) \in A \mid (a, b) \text{ divisore dello zero in } A\}$ ,  $V = \{(a, b) \in A \mid (a, b) \text{ invertibile in } A\}$  di  $A$ , si studi se essi sono sottoanelli o ideali di  $A$  e, in caso affermativo, se sono domini d'integrità o campi.

(iv) Posto

$$\varphi : (a, b) \in A \mapsto a + b \in \mathbb{Z} \quad \psi : (a, b) \in A \mapsto 3xy \in \mathbb{Z}_6,$$

si studi se  $\varphi, \psi$  sono iniettive o suriettive e se sono omomorfismi di anelli.

**Esercizio 3.** Nello spazio vettoriale reale  $\mathbb{R}^3$  si considerino i sottoinsiemi

$$H = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a + 3b - c = 0\} \quad \text{e} \quad W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c = 1\},$$

(i) Si studi se  $H, W$  sono sottospazi di  $\mathbb{R}^3$  e in tal caso se ne determinino la dimensione e due basi.

(ii) Si determinino gli elementi del sottospazio  $V$  generato da  $(0, 1, 1)$ .

(iii) Posto

$$\varphi : (a, b, c) + V \in \mathbb{R}^3/V \mapsto (a - b - c, a) \in \mathbb{R}^2,$$

si studi se  $\varphi$  è ben posta e se è un omomorfismo di spazi vettoriali. Si determini il nucleo, l'immagine, le rispettive dimensioni e si dica se  $\varphi$  è iniettiva o suriettiva.