ALGEBRA 1: Giugno 2017

Esercizio 1. Nel gruppo $GL(2,\mathbb{Q})$ delle matrici 2×2 invertibili su $\mathbb{Q}$, si consideri il sottoinsieme

$$G = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \{-1,1\}, b \in \mathbb{Q}\}.$$

(*i*) Si provi che G è un sottogruppo di $GL(2,\mathbb{Q})$, si studi se esso è abeliano e se ne determini la cardinalità.

(*ii*) Posto $x = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $y = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, s determinino gli ordini di x, y, xy..

(*iv*) Posto

$$\varphi : \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \in G \longmapsto a \in \{-1,1\},$$

si provi che φ è un omomorfismo del gruppo G nel gruppo $\{-1,1\}(\cdot)$, se ne determini il nucleo, e si dica se φ è iniettiva o suriettiva.

(*v*) Per ogni sottogruppo S del gruppo additivo $\mathbb{Q}(+)$, si provi che l'insieme $H(S) = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid x \in S\}$ è un sottogruppo normale di G. Nei casi $S = \{0\}$ e $S = \mathbb{Q}$, si studi il gruppo quoziente $G/H(S)$.

Esercizio 2. Si consideri l'anello prodotto $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}(+,\cdot)$.

(*i*) Si provi che A è un anello commutativo e unitario e se ne determinino la cardinalità e la caratteristica.

(*ii*) Si scrivano gli elementi invertibili di A e i suoi divisori dello zero, e si dica se A è un campo.

(*iii*) Posti $S = \{(a,0) \in A | \ a \in \mathbb{Z}\}$, $T = \{(a,b) \in A \mid (a,b)$ divisore dello zero in A$\}$, $V = \{(a,b) \in A \mid (a,b)$invertibile in A$\}$ di A, si studi se essi sono sottoanelli o ideali di A e, in caso affermativo, se sono domini d'integrità o campi.

(*iv*) Posto

$$\varphi : (a,b) \in A \longmapsto a+b \in \mathbb{Z} \qquad \psi : (a,b) \in A \longmapsto 3xy \in \mathbb{Z}_6,$$

si studi se φ, ψ sono iniettive o suriettive e se sono omomorfismi di anelli.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ si considerino i sottoinsiemi

$$H = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a+3b-c=0\} \quad \text{e} \quad W = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^4 \mid a+b+c=1\},$$

(*i*) Si studi se H, W sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$ e in tal caso se ne determinino la dimensione e due basi.

(*ii*) Si determinino gli elementi del sottospazio V generato da $(0,1,1)$.

(*iii*) Posto

$$\varphi \ : \ (a,b,c)+V \in \mathbb{R}^3/V \longmapsto (a-b-c, a) \in \mathbb{R}^2,$$

si studi se φ è ben posta e se è un omomorfismo di spazi vettoriali. Si determini il nucleo, l'immagine, le rispettive dimensioni e si dica se φ è iniettiva o suriettiva.