ALGEBRA 1: Giugno 2018 - I prova

Esercizio 1. Nel gruppo $GL(2,\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 invertibili su $\mathbb{R}$, si consideri il sottoinsieme

$$G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R}, (a,b) \neq (0,0)\}.$$

(i) Si provi che G è un sottogruppo di $GL(2,\mathbb{R})$, si studi se esso è abeliano e se ne determini la cardinalità.

(ii) Posto $x = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $y = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, si determinino gli ordini di x, y, xy.

(iii) Posto $H = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right) \in G \mid a^2 + b^2 = 1\}$, si provi che H è un sottogruppo normale di G.

(iv) Posto poi

$$\varphi : \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} H \in G/H \longmapsto a^2 + b^2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

si provi che φ è ben posta, che è un omomorfismo del gruppo G/H nel gruppo $\mathbb{R} \setminus \{0\}(\cdot)$, se ne determini il nucleo, e si dica se φ è iniettiva o suriettiva.

Esercizio 2. Si consideri l'anello prodotto $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}_8(+,\cdot)$.

(i) Si provi che A è un anello commutativo e unitario, e se ne determinino la cardinalità e la caratteristica.

(ii) Si scrivano gli elementi invertibili di A e i suoi divisori dello zero.

(iii) Posti $S = \{(a,\bar{0}) \in A \mid a \in \mathbb{Z}\}$, $T = \{(a,\bar{0}) \in A \mid a \in \mathbb{Q}\}$, $V = \{(0,\bar{b}) \in A \mid b \in \mathbb{Z}\}$, si studi se essi sono sottoanelli, sottoanelli unitari, o ideali di A e, in caso affermativo, se sono domini d'integrità o campi, e se ne determini la caratteristica.

(iv) Posto

$$\varphi : (a,\bar{b}) + V \in A/V \longmapsto 2a \in \mathbb{Q} \qquad \psi : (a,\bar{b}) \in A/T \longmapsto 3\bar{b} \in \mathbb{Z}_8,$$

si studi se φ, ψ sono ben poste, e, in tal caso, se sono iniettive o suriettive e se sono omomorfismi di anelli.

Esercizio 3. Si consideri $\mathbb{Q}^4$, strutturato in modo naturale come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale. Sia H il sottoinsieme di $\mathbb{Q}^4$ definito da:

$$H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{Q}^4 \mid 2x - z = 0,\ y = -t\}.$$

(i) Si studi se H è un sottospazio di $\mathbb{Q}^4$ e in tal caso se ne determinino la dimensione e due basi.

(ii) Posto

$$\varphi \ : \ (x,y,z,t) \in \mathbb{Q}^4 \longmapsto (x-y, 2x-z) \in \mathbb{Q}^2,$$

si studi se φ è un omomorfismo di spazi vettoriali. In caso affermativo, si determinino l'immagine e il nucleo di φ, le rispettive dimensioni e si dica se φ è un $\mathbb{Q}$-isomorfismo.