

ALGEBRA 1: Giugno 2018 - II prova

Esercizio 1. Nel gruppo $GL(2, \mathbb{R})$ delle matrici 2×2 invertibili su \mathbb{R} , si consideri il sottoinsieme

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0) \right\}.$$

- (i) Si provi che G è un sottogruppo di $GL(2, \mathbb{R})$, si studi se esso è abeliano e se ne determini la cardinalità.
- (ii) Posto $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, si determinino gli ordini di x, y, xy .
- (iii) Posto $z = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ si provi, utilizzando il principio d'induzione, che $z^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- (iv) Posto $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in G \mid a^2 + b^2 = 1 \right\}$, si provi che H è un sottogruppo normale di G .
Posto poi

$$\varphi : \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} H \in G/H \longmapsto a^2 + b^2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

si provi che φ è ben posta, che è un omomorfismo del gruppo G/H nel gruppo $\mathbb{R} \setminus \{0\}(\cdot)$, se ne determini il nucleo, e si dica se φ è iniettiva o suriettiva.

- (vi) Poste $f : \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in G \longmapsto (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $g : (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longmapsto a \in \mathbb{R}$, si calcoli $g \circ f$ e si studi se $f, g, g \circ f$ sono iniettive o suriettive.

Esercizio 2. Si consideri l'anello prodotto $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}_8(+, \cdot)$.

- (i) Si determinino la cardinalità e la caratteristica di A .
- (ii) Si scrivano gli elementi invertibili di A e i suoi divisori dello zero.
- (iii) Posti $S = \{(a, \bar{0}) \in A \mid a \in \mathbb{Z}\}$, $T = \{(a, \bar{0}) \in A \mid a \in \mathbb{Q}\}$, $V = \{(0, \bar{b}) \in A \mid b \in \mathbb{Z}\}$, si studi se essi sono sottoanelli, sottoanelli unitari, o ideali di A e, in caso affermativo, se sono domini d'integrità o campi, e se ne determini la caratteristica.
- (iv) Posto

$$\varphi : (a, \bar{b}) + V \in A/V \longmapsto 2a \in \mathbb{Q} \quad \psi : (a, \bar{b}) \in A/T \longmapsto 3\bar{b} \in \mathbb{Z}_8,$$

si studi se φ, ψ sono ben poste, e, in tal caso, se sono iniettive o suriettive e se sono omomorfismi di anelli.

Esercizio 3. Si consideri \mathbb{Q}^4 , strutturato in modo naturale come \mathbb{Q} -spazio vettoriale. Sia H il sottoinsieme di \mathbb{Q}^4 definito da:

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{Q}^4 \mid 2x - z = 0, y = -t\}.$$

- (i) Si studi se H è un sottospazio di \mathbb{Q}^4 e in tal caso se ne determinino la dimensione e due basi.
- (ii) Posto

$$\varphi : (x, y, z, t) \in \mathbb{Q}^4 \longmapsto (x - y, 2x - z) \in \mathbb{Q}^2,$$

si studi se φ è un omomorfismo di spazi vettoriali. In caso affermativo, si determinino l'immagine e il nucleo di φ , le rispettive dimensioni e si dica se φ è un \mathbb{Q} -isomorfismo.