# ALGEBRA 1: Luglio 2017

**Esercizio 1.** Sia $G = SL(2, \mathbb{Z}) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1\}$, con il prodotto righe per colonne, e sia

$$N = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \mid 3 \ divide \ b \ e \ c\}.$$

$(i)$ Si provi che $N$ è un sottogruppo di $G$, si studi se esso è abeliano e se ne determini la cardinalità.

$(ii)$ Si provi che per ogni $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in N$ si ha che 3 divide $a - d$.

$(iii)$ Si dimostri che $N$ è un sottogruppo normale di $G$.

$(iv)$ Posto $x = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $y = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, si determinino gli ordini di $x$ e di $y$ in $G$ e di $xN$ e di $yN$ in $G/N$.

$(v)$ Posto

$$\varphi : a \in \mathbb{Z} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G,$$

si provi che $\varphi$ è un omomorfismo del gruppo $\mathbb{Z}(+)$ nel gruppo $G$, se ne determinino il nucleo e l'immagine, e si dica se $\varphi$ è iniettiva o suriettiva.

**Esercizio 2.** Si consideri l'anello prodotto $A = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6(+, \cdot)$.

$(i)$ Si provi che $A$ è un anello commutativo e unitario e se ne determinino la cardinalità e la caratteristica. Si scrivano gli elementi invertibili di $A$ e i suoi divisori dello zero, e si dica se $A$ è un campo.

$(ii)$ Posti $S = \{(a, 2b) \mid a \in \mathbb{Z}_4, b \in \mathbb{Z}_6\}$, $T = \{(0, c) \mid c \in \mathbb{Z}_6\}$ si provi che $T$ è un ideale bilatero di $A$, e che $S$ è un sottoanello unitario di $A$ e se ne determini l'unità e la caratteristica.

$(iii)$ Posto

$$\varphi : (a, b) + T \in A/T \longmapsto 3a \in \mathbb{Z}_4$$

si studi se $\varphi$ è ben posta, se è iniettiva o suriettiva e se è un omomorfismo di anelli.

**Esercizio 3.** Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ si considerino i sottoinsiemi

$$H = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a - 3b = 0\} \quad \text{e} \quad W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a + 3b = 1\},$$

$(i)$ Si studi se $H$, $W$ sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$ e in tal caso se ne determinino la dimensione e due basi.

$(ii)$ Posto

$$\varphi : (a, b, c) + H \in \mathbb{R}^3/H \longmapsto 10a - 15b \in \mathbb{R}, \quad \psi : (a, b, c) + H \in \mathbb{R}^3/H \longmapsto (2a - 3b)^2 + 3 \in \mathbb{R}$$

si studi se $\varphi, \psi$ sono ben poste e se sono omomorfismi di spazi vettoriali. In caso affermativo, si determinino il nucleo, l'immagine e le rispettive dimensioni.