

## ALGEBRA 1: Dicembre 2017

**Esercizio 1.** Nel gruppo  $G = GL(2, \mathbb{R})$  delle matrici  $2 \times 2$  invertibili su  $\mathbb{R}$ , si considerino i sottoinsiemi:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, c \in \mathbb{R} \right\}, M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}, N = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \right\}.$$

- (i) Si provi che  $H, N, M$  sono sottogruppi di  $G$ , si studi se  $H$  è abeliano, se è normale in  $G$  e se  $N, M$  sono normali in  $H$ .
- (ii) Si determini l'insieme  $X$  degli elementi di  $H$  di ordine  $\leq 2$  e si studi se  $X$  è un sottogruppo di  $H$ .
- (iii) Si studi se le posizioni

$$\varphi : \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} M \in H/M \mapsto a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \psi : \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} N \in H/N \mapsto c \in \mathbb{R},$$

definiscono applicazioni ben poste e si studi se esse sono omomorfismi rispettivamente di  $H/M$  in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}(\cdot)$  e di  $H/N$  in  $\mathbb{R}(+)$  e se sono iniettive o suriettive.

- (iv) Per ogni sottogruppo  $S$  del gruppo additivo  $\mathbb{Z}(+)$ , si provi che l'insieme

$$H(S) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \mid x \in S \right\}$$

è un sottogruppo normale di  $H$ .

**Esercizio 2.** Si consideri l'anello prodotto  $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_6(+, \cdot)$ .

- (i) Si provi che  $A$  è un anello commutativo e unitario e se ne determinino la cardinalità e la caratteristica. Si scrivano i divisori dello zero di  $A$ , e si dica se  $A$  è un campo.
- (ii) Posti  $S = \{(2a, [2b]_6) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ,  $T = \{(a, [a]_6) \mid a \in \mathbb{Z}\}$  si studi se  $S, T$  sono sottoanelli o ideali di  $A$ , e si determini l'ordine e la caratteristica dell'anello quoziente  $A/S$ .
- (iii) Posto

$$\varphi : (a, [b]_6) + S \in A/S \mapsto [3a]_6 \in \mathbb{Z}_6$$

si studi se  $\varphi$  è ben posta, se è iniettiva o suriettiva e se è un omomorfismo di anelli.

**Esercizio 3.** Nello spazio vettoriale reale  $\mathbb{R}^4$  si consideri il sottoinsieme

$$H = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = c, b = -a\},$$

- (i) Si provi che  $H$  è un sottospazio di  $\mathbb{R}^4$ , se ne determini la dimensione e due basi.
- (ii) Posto

$$\varphi : (x, y, z, t) + H \in \mathbb{R}^4/H \mapsto (x + 2y + z, 2x - 2z) \in \mathbb{R}^2$$

si studi se  $\varphi$  è ben posta, se è un isomorfismo di spazi vettoriali, se ne determinino il nucleo e l'immagine, si studi se essa è iniettiva o suriettiva e se ne determini l'eventuale inversa.