

ALGEBRA 1: Giugno 2017

Esercizio 1. Nel gruppo $GL(2, \mathbb{Q})$ delle matrici 2×2 invertibili su \mathbb{Q} , si consideri il sottoinsieme

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \{-1, 1\}, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

(i) Si provi che G è un sottogruppo di $GL(2, \mathbb{Q})$, si studi se esso è abeliano e se ne determini la cardinalità.

(ii) Posto $x = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, si determinino gli ordini di x, y, xy .

(iii) Posto

$$\varphi : \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \in G \mapsto a \in \{-1, 1\},$$

si provi che φ è un omomorfismo del gruppo G nel gruppo $\{-1, 1\}(\cdot)$, se ne determini il nucleo, e si dica se φ è iniettiva o suriettiva.

(iv) Per ogni sottogruppo S del gruppo additivo $\mathbb{Q}(+)$, si provi che l'insieme

$$H(S) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \mid x \in S \right\}$$

è un sottogruppo normale di G .

(v) Posto $\psi : \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \in G \mapsto a + b \in \mathbb{Q}$, si studi se ψ è iniettiva o suriettiva.

(vi) Si provi, utilizzando il principio d'induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Si consideri l'anello prodotto $A = \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10}(+, \cdot)$.

(i) Si provi che A è un anello commutativo e unitario e se ne determinino la cardinalità e la caratteristica. Si scrivano i divisori dello zero di A , e si dica se A è un campo.

(ii) Posti $S = \{(2a, 2b) \mid a, b \in \mathbb{Z}_{10}\}$, $T = \{(c, 0) \mid c \in \mathbb{Z}_{10}\}$ si provi che T è un ideale bilatero di A , e che S è un sottoanello unitario di A e se ne determini l'unità e la caratteristica.

(iii) Posto

$$\varphi : (a, b) + T \in A/T \mapsto 6b \in \mathbb{Z}_{10}$$

si studi se φ è ben posta, se è iniettiva o suriettiva e se è un omomorfismo di anelli.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale reale \mathbb{R}^4 si consideri il sottoinsieme

$$H = \{(a, b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

(i) Si provi che H è un sottospazio di \mathbb{R}^4 , se ne determini la dimensione e due basi.

(ii) Posto

$$\varphi : (x, y, z, t) + H \in \mathbb{R}^4/H \mapsto (x - z, 2y - 2t) \in \mathbb{R}^2$$

si provi che φ è ben posta, che è un isomorfismo di spazi vettoriali e se ne determini l'inversa.