ALGEBRA I

Aprile 2014

1. Si considerino gli insiemi

$$G=\{\begin{pmatrix}1-a & -a\\ a & 1+a\end{pmatrix} \mid a\in\mathbb{Q}\}, H=\{\begin{pmatrix}1-a & -a\\ a & 1+a\end{pmatrix} \mid a\in\mathbb{Z}\}$$

Si giustifichi perchè è $G\subseteq GL(2,\mathbb{Q})$.
Si provi che G è un sottogruppo di $GL(2,\mathbb{Q})(\cdot)$ e che H è un sottogruppo normale di G.
Si dimostri che $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1-n & -n\\ n & n+1\end{pmatrix}$, per ogni $n\in\mathbb{Z}$, e se ne deduca che $H=\langle\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\rangle$
Si provi che, nel gruppo quoziente G/H l'elemento $\begin{pmatrix}1-1/3 & -1/3\\ 1/3 & 4/3\end{pmatrix}H$ ha periodo 3.
Si dimostri poi che l'applicazione

$$\varphi: a+\mathbb{Z}\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\longmapsto\begin{pmatrix}1-a & -a\\ a & 1+a\end{pmatrix}H\in G/H$$

è ben posta ed è un isomorfismo di $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(+)$ in $G/H(\cdot)$.

2. Si consideri l'anello prodotto

$$A=\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_6(+,\cdot),$$

Si provi che A è un anello commutativo unitario, se ne determini la caratteristica, i divisori dello 0, gli elementi invertibili. Si studi se A è un campo o un dominio d'integrità.
Considerati i sottoinsiemi

$$S=\{(\bar a,\overline{a+1})|\bar a\in\mathbb{Z}_6\},\ T=\{(\bar a,\bar a)|\bar a\in\mathbb{Z}_6\},\ V=\{(\bar a,\bar 0)|\bar a\in\mathbb{Z}_6\},$$

si studi se essi sono sottoanelli o ideali di A.
Posta poi

$$\varphi:(\bar x,\bar y)+V\in A/V\longmapsto\bar y\in\mathbb{Z}_6$$

si provi che φ è un'applicazione ben posta e che essa è un isomorfismo dell'anello A/V nell'anello $\mathbb{Z}_6$.

3. Sia K un campo e si consideri K^3, strutturato in modo naturale come K-spazio vettoriale.
(i) Si studi se la parte $\{(2,3,10),(3,2,2),(0,0,6)\}$ è una base di K^3, distinguendo i casi: (I) $K=\mathbb{R}$, (II) $K=\mathbb{Z}_2$, (III) $K=\mathbb{Z}_3$.
Si determini il sottospazio $W=\langle(1,2,3)\rangle$.
(ii) Si provi che l'applicazione $\psi:(a,b,c)\in K^3/W\longmapsto a+b-c\in K$ è ben posta ed è un epimorfismo di K-spazi vettoriali. Si determini poi il nucleo di ψ e la sua dimensione.