ALGEBRA I

Febbraio 2016

1. Nel gruppo $G = GL(2, \mathbb{Z}_5)$ delle matrici due per due invertibili su $\mathbb{Z}_5$ si consideri il sottoinsieme

$$H = \{ \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{b} \end{pmatrix} \mid \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_5^{\star} \}.$$

(i) Si provi che H è un sottogruppo abeliano di G, e ne determini l'ordine.
(ii) Posto

$$X = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix}$$

si determinino l'ordine di X e di Y, e gli elementi di $S = \langle X \rangle$ e di $T = \langle Y \rangle$.
(iii) Si studi il gruppo quoziente H/S determinandone l'ordine, gli elementi, i sottogruppi.

2. Nell'anello $A = (M_2(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ delle matrici 2×2 sull'anello degli interi si consideri la parte

$$S = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \}.$$

(i) Si provi che S è un sottoanello unitario di A, se ne determinino la cardinalità, il sottoanello fondamentale, la caratteristica e i divisori dello zero, e si dica se S è un corpo.
(ii) Posto

$$f : z \in \mathbb{Z} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \in S$$

si provi che f è è un monomomorfismo di anelli e si stabilisca se $J = Imf$ è un ideale bilatero di S. Si dica poi se sono uguali nel gruppo quoziente $S/J(+)$ i laterali $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) + J$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right) + J$.
(iii) Posto

$$\varphi : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in S/J \longmapsto a + c \in \mathbb{Z},$$

si stabilisca se φ è ben posta e se è un omomorfismo di gruppi.

3. Si consideri $\mathbb{R}^4$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale nel modo usuale. Sia W il sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$ definito ponendo

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 4y = 0, 3z - 6y = 0\}.$$

(i) Si provi che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$, se ne determini la dimensione e una base.
(ii) Si determini il sottospazio H di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$.
(ii) Posto

$$\varphi \ : \ (x, y, z, t) + H \ \in \mathbb{R}^4/H \ \longmapsto y - t \in \mathbb{R},$$

si studi se φ è ben posta, e se è un omomorfismo di spazi vettoriali.
In caso affermativo, si determinino l'immagine di φ e una base dell'immagine di φ, il nucleo di φ e una base del nucleo φ.