

## ALGEBRA I

Giugno 2014

1. Nel gruppo  $G = GL(2, \mathbb{Z}_{10})$  delle matrici due per due invertibili su  $\mathbb{Z}_{10}$  si consideri il sottoinsieme

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathbb{Z}_{10}^*, b \in \mathbb{Z}_{10} \right\}.$$

(i) Si provi che  $H$  è un sottogruppo di  $G$ , se ne determini la cardinalità, si studi se  $H$  è abeliano e se è normale in  $G$ .

(ii) Posto

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Z}_{10} \right\}$$

si provi che  $N$  è un sottogruppo normale in  $H$ , si determini l'ordine del gruppo quoziente  $H/N$  e si provi che esso è un gruppo abeliano.

(iii) Si dimostri infine che la posizione

$$\varphi : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} N \in H/N \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G$$

definisce un monomorfismo di  $H/N$  in  $G$ , e se ne determinino il nucleo e l'immagine.

2. Si consideri l'anello prodotto  $A = \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{10}$ .

(i) Si determinino l'ordine di  $A$  e la sua caratteristica.

(ii) Si determinino i divisori dello zero in  $A$  e si dica se  $A$  è un campo.

(iii) Posto  $S = \{(\bar{x}, \bar{0}) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ ,  $T = \{(\bar{1}, \bar{y}) \mid y \in \mathbb{Z}\}$ ,  $V = \{(\bar{x}, \bar{x}) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ , si studi se  $S, T, V$  sono sottoanelli o ideali di  $A$ .

(iv) Posto

$$\psi : (\bar{x}, \bar{y}) \in A \longmapsto \bar{2x} \in \mathbb{Z}_{10},$$

si provi che  $\psi$  è ben posta, che è un omomorfismo tra i gruppi  $A(+)$  e  $\mathbb{Z}_{10}(+)$ , ma non un omomorfismo tra gli anelli  $A(+, \cdot)$  e  $\mathbb{Z}_{10}(+, \cdot)$ . Si determinino il nucleo e l'immagine di  $\psi$ . Posto infine  $B = \psi(A)$ , si provi che  $B$  è un sottoanello unitario di  $\mathbb{Z}_{10}$  e se ne determini l'unità e la caratteristica.

3. Si consideri l'applicazione

$$f : (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \longmapsto (a + 3c, a - c - d, a + 2d) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Si verifichi che  $f$  è lineare.

(ii) Si determini la dimensione e una base di  $\text{Ker}(f)$ .

(iii) Si determini la dimensione e una base di  $\text{Im}(f)$ .