ALGEBRA I – Giugno 2016

1. Nel gruppo $G = GL(2, \mathbb{Z}_5)$ delle matrici due per due invertibili sull'anello $\mathbb{Z}_5$ degli interi modulo 5 si consideri la parte

$$H = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}_5^*, b \in \mathbb{Z}_5\}.$$

(i) Si provi che H è un sottogruppo di G, se ne determini la cardinalità, si studi se H è abeliano e se è normale in G.
(ii) Posto

$$x = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si determinino il periodo di x e di y e si scrivano gli elementi di $L = \langle x \rangle$ e di $\langle y \rangle$.
(iii) Si provi che L è normale in H, si determini l'ordine del gruppo quoziente H/L e si studi se $y^4 L = yL$.
(iv) Posta

$$\varphi : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} L \in H/L \longmapsto a^2 \in \mathbb{Z}_5^*$$

si provi che φ è un'applicazione ben posta, si studi se è un epimorfismo di H/L in $\mathbb{Z}_5^*(\cdot)$, e si determini il nucleo N/L di φ.
(v) Si studi il gruppo quoziente H/N, determinandone l'ordine, la struttura ed i sottogruppi.

2. Si consideri l'anello prodotto $A = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6$.
(i) Si precisino la cardinalità, il sottoanello fondamentale e la caratteristica di A. Si determinino i divisori dello zero e gli elementi invertibili in A e si dica se A è un campo.
(ii) Posto $V = \{(\bar{a}, \bar{0}) \mid a \in \mathbb{Z}\}$, $W = \{(\bar{b}, \bar{b}) \mid b \in \mathbb{Z}\}$, $T = \{(\bar{0}, \bar{c}) \mid c \in \mathbb{Z}\}$ si studi se V, W, T sono sottoanelli unitari di A e, in caso affermativo, se ne determinino l'unità, la caratteristica e si dica se essi sono campi. Si studi se V, W, T sono ideali bilateri di A e, in caso affermativo, si individui la cardinalità del relativo anello quoziente.
(iii) Posto

$$\psi : (\bar{a}, \bar{b}) \in A \longmapsto \overline{6a - 5b} \in \mathbb{Z}_{30},$$

si studi se ψ è ben posta, se è iniettiva o suriettiva, se è un omomorfismo tra gli anelli A e $\mathbb{Z}_{30}(+, \cdot)$.

3. Sia Λ un campo e si strutturi Λ^4 come Λ-spazio vettoriale nel modo usuale. Sia W il sottoinsieme di Λ^4 definito ponendo

$$W = \{(x, y, z, t) \in \Lambda^4 \mid x = y + z, y + t = 2x\}.$$

(i) Si provi che W è un sottospazio di Λ^4, se ne determini la dimensione e se ne scrivano due basi.
(ii) Posto

$$\varphi \ : \ (x, y, z, t) + W \ \in \Lambda^4/W \ \longmapsto x + z - t \in \Lambda,$$

si studi se φ è ben posta, se è un omomorfismo di spazi vettoriali, se ne determinino il nucleo, l'immagine, le rispettive dimensioni e si dica se φ è iniettiva o suriettiva.