

ALGEBRA I
Settembre 2014

1. Nel gruppo $G = GL(2, \mathbb{Z}_6)$ delle matrici due per due invertibili su \mathbb{Z}_6 si consideri il sottoinsieme

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}_6^*, c \in \mathbb{Z}_6 \right\}.$$

(i) Si provi che H è un sottogruppo di G , se ne determini la cardinalità, si studi se H è abeliano e se è normale in G .

(ii) Posti

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{Z}_6 \right\}, M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}_6^* \right\}$$

si provi che N e M sono sottogruppi normali in H , si determini l'ordine dei gruppi quoziente H/N e H/M , e se ne studi la struttura.

(iii) Si determini l'insieme X degli elementi di H di periodo 2 e si studi se $X \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ è un sottogruppo di H .

(iv) Si studi infine se le posizioni

$$\varphi : \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} N \in H/N \longmapsto c \in \mathbb{Z}_6, \psi : \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} M \in H/M \longmapsto a \in \mathbb{Z}_6^*$$

definiscono applicazioni ben poste e si studi se esse sono omomorfismi rispettivamente tra i gruppi H/N e $\mathbb{Z}_6(+)$ e H/M e $\mathbb{Z}_6^*(\cdot)$, e se sono iniettive o suriettive.

2. Sia $(A, +, \cdot)$ l'anello prodotto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_4$.

(i) Si precisino la caratteristica e il sottoanello fondamentale di A .

(ii) Si individuino gli eventuali divisori dello zero in A e si precisi se A è un campo.

(iii) Si dimostri che la posizione

$$\phi((x, [y]_4)) = [3y]_6$$

definisce un'applicazione di A in \mathbb{Z}_6 , e si studi se tale applicazione è un omomorfismo di anelli tra A e $\mathbb{Z}_6(+, \cdot)$, determinandone eventualmente nucleo e immagine.

(iv) Posto $W = \{(y, [y]_4) \mid y \in \mathbb{Z}\}$, $T = \{(0, [y]_4) \mid y \in \mathbb{Z}\}$, si studi se W, T sono sottoanelli unitari di A e, in caso affermativo, se ne determinino l'unità e la caratteristica. Si studi se W, T sono ideali bilateri di A e, in caso affermativo, si individui la cardinalità del relativo anello quoziente.

3. Sia W la parte dello spazio vettoriale \mathbb{R}^4 sul campo \mathbb{R} dei numeri reali definita ponendo

$$W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a - d = 0, b = -a\}.$$

Si verifichi che W è un sottospazio di \mathbb{R}^4 . Si determini la dimensione di W e si scrivano due sue basi. Posto

$$\varphi : (a, b, c, d) + W \in \mathbb{R}^4/W \longmapsto (a + b, 3a - b - 2d) \in \mathbb{R}^2,$$

si studi se φ è ben posta e se è un omomorfismo di spazi vettoriali. In caso affermativo, si determinino il nucleo di φ e la dimensione del nucleo di φ . Si deduca se φ è iniettiva o suriettiva.