ALGEBRA I

Febbraio 2014

1. Nel gruppo $GL(2,\mathbb{Z})$ delle matrici due per due invertibili su $\mathbb{Z}$ si consideri la parte

$$G = \{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \,|x, z \in \{-1, 1\}, \quad y \in \mathbb{Z}\}.$$

Si provi che G è un sottogruppo non abeliano di $GL(2,\mathbb{Z})$.
Posto $a = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), b = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, si determinino il periodo di a e di b, i sottogruppi $A = \langle a \rangle, B = \langle b \rangle$, e si studi se A, B sono normali in G.
Posto $N = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 5n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \,|n \in \mathbb{Z}\}$ si provi che N è un sottogruppo normale di A e si determinino gli elementi e l'ordine del gruppo quoziente A/N.
Posta infine

$$\varphi : a^n N \in A/N \longmapsto [n]_5 \in \mathbb{Z}_5$$

si studi se φ è ben posta, e se è un isomomorfismo di A/N in $\mathbb{Z}_5(+)$).

2. Si consideri l'anello prodotto $A = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4(+, \cdot)$.
(i) Si provi che A è un anello commutativo unitario, se ne determini la cardinalità, il sottoanello fondamentale, la caratteristica, i divisori dello 0, gli elementi invertibili. Si studi se A è un campo o un dominio d'integrità.
(ii) Considerati i sottoinsiemi

$$H = \{([r]_6, [0]_4) \mid r \in \mathbb{Z}\}, L = \{([r]_6, [r]_4) | r \in \mathbb{Z}\}, M = \{([0]_6, [0]_4) \cup \{x \in A \mid x \, invertibile\},$$

si studi se essi sono sottoanelli o ideali di A.
(iii) Posta poi

$$\varphi : ([r]_6, [s]_4) + H \in A/H \longmapsto [s]_2 \in \mathbb{Z}_2,$$

si studi se φ è un'applicazione ben posta, se è un omomorfismo dell'anello A/H nell'anello $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$, se è iniettiva o suriettiva.

3. Sia K un campo e si consideri K^3, strutturato in modo naturale come K-spazio vettoriale.
(i) Si studi se la parte $\{(3, 2, 6), (4, 5, 2), (2, 6, 1)\}$ è una base di K^3, distinguendo i casi : (I) $K = \mathbb{R}$, (II) $K = \mathbb{Z}_2$, (III) $K = \mathbb{Z}_3$.
Si determini il sottospazio $W = \langle (3, 2, 0) \rangle$.
(ii) Si studi se l'applicazione $\psi : (a, b, c) \in K^3/W \longmapsto (2a - b + c, 0) \in K^2$ è ben posta, se è iniettiva o suriettiva, se è un K-omomorfismo nei casi : (I) $K = \mathbb{R}$, (II) $K = \mathbb{Z}_2$, (III) $K = \mathbb{Z}_3$. Sempre nei tre casi precedenti, se ψ è un K-omomorfismo, si determinino poi il nucleo e l'immagine di ψ e le rispettive dimensioni.